Министерство науки и высшего образования РФ
ФГБОУВО «Заполярный государственный
университет им. Н.М. Федоровского»
Кафедра физико-математических дисциплин

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

Методические указания и типовые расчеты

Норильск 2023

ББК 22.141я7

Комплексные числа: метод. указ. и типовые расчеты / сост.: Г.В. Семенов, А.И. Сотников, У.М. Багомедова; Министерство науки и высшего образования РФ, Заполярный гос. ун-т им. Н.М. Федоровского. – Норильск: ЗГУ, 2022. – 40 с. – Библиогр.: с. 37. – Текст: непосредственный.

Методические указания составлены согласно государственному образовательному стандарту и примерным программам дисциплины «Математика».

Предназначены для обучающихся технических направлений бакалавриата и специалитета. Содержат основные сведения о комплексных числах, представлены задания для практических занятий и самостоятельной работы студентов (типовой расчет).

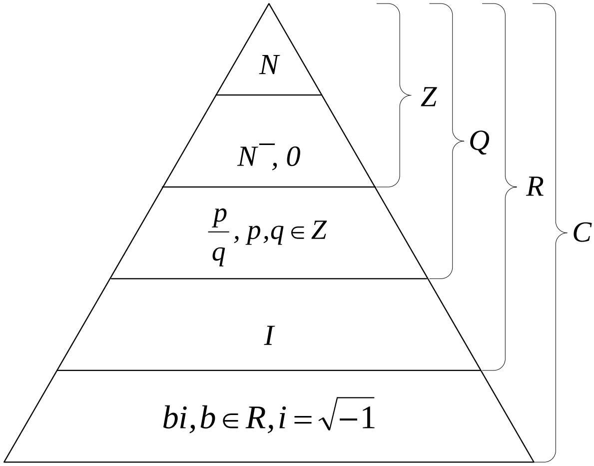
ВВЕДЕНИЕ

Впервые мнимые величины появились в труде «Великое искусство, или об алгебраических правилах» итальянского учёного Дж. Кардано (1545), который счёл их бесполезными, непригодными к употреблению. Пользу мнимых величин, в частности при решении кубического уравнения в так называемом неприводимом случае (когда действительные корни выражаются через кубические корни из мнимых величин), впервые оценил итальянский учёный Р. Бомбелли (1572). Он дал некоторые простейшие правила действий с комплексными числами. Однако для многих крупных учёных XVII в. алгебраическая и геометрическая сущность мнимых величин представлялась неясной и даже загадочной и мистической. Известно, например, что английский учёный И. Ньютон не включал мнимые величины в понятия числа, а немецкому учёному Г. Лейбницу принадлежит фраза: «Мнимые числа – это прекрасное и чудесное убежище божественного духа, почти что амфибия бытия с небытием».

Задача о выражении корней степени n из данного числа была в основном решена в работах английских учёных А. Муавра (1707, 1724) и Р. Котеса (1722). Символ $i=\sqrt{-1}$ предложил российский учёный Л. Эйлер (1777). Термин «комплексное число» ввёл французский учёный Л. Карно (1803), в употребление он вошёл после работ К. Гаусса (1831).

Полное геометрическое истолкование комплексных чисел и действий над ними появилось впервые в работе датского учёного К. Весселя (1799). Геометрическое представление комплексных чисел называют иногда «диаграммой Аргана», оно вошло в обиход после опубликования в 1806 и 1814 гг. работы швейцарского учёного Ж. Аргана, повторявшей, в основном независимо, выводы К. Весселя.

В настоящее время понятие комплексного числа является самым широким понятием о числе (см. рисунок). Множество комплексных чисел C содержит множество чисто мнимых чисел и множество действительных чисел R. В свою очередь, все действительные числа делятся на рациональные Q и иррациональные I. Совокупность рациональных чисел состоит из целых Z и дробных чисел. Целые числа – это совокупность натуральных N, нуля и натуральных чисел с отрицательными знаками.



Классификация чисел в математике

Комплексные числа служат основой для так называемой теории функций комплексного переменного, которая позволяет удобно и компактно сформулировать многие математические модели, применяемые в математической физике и в естественных науках – электротехнике, гидродинамике, картографии, квантовой механике, теории колебаний и многих других.

Функции комплексного переменного широко используются в некоторых областях науки и техники потому, что дают в руки исследователя удобный математический аппарат. Ч. Штейнметц (1865–1923) был первым, кто привлек внимание инженеров-электриков к тем практическим преимуществам, которые дают комплексные функции при рассмотрении проблем, связанных с переменным током. Аналогично для упрощения процедуры решения линейных дифференциальных уравнений, возникающих в электротехнике и механике, О. Хевисайд (1850–1925) ввел формальное операционное исчисление, которое ныне вытеснено преобразованиями Лапласа и Фурье, представляющих частные случаи интегрального представления Коши из теории аналитических функций. В связи с этим при вычислении несобственных действительных интегралов, часто возникающих в практических проблемах, широко используется теория вычетов Коши. Более основательный вклад был внесен теорией комплексных функций в гидродинамику и теорию теплопроводности. В гидродинамике теория функций комплексного переменного используется для решения задач, связанных с установившимся плоско-параллельным течением несжимаемой безвихревой жидкости. В аэродинамике изучение обтекания привело к открытию закона образования подъемной силы крыла самолета.

Данные методические указания призваны помочь студентам технической специальности систематизировать теоретические сведения по теме «Комплексные числа». Для закрепления умений и навыков по данной теме даны задачи и упражнения для практических занятий, которые снабжены ответами, а также задания для типового расчета (30 вариантов). В помощь студенту в приложение помещены основные формулы, необходимые при решении задач.

Определения, теоремы и примеры имеют нумерацию, на которую можно ссылаться при решении заданий. Важнейшие формулы выделены рамками и также имеют номера. Значком ◆ отмечены некоторые важные выводы. Свойства обозначены цифрами со знаком $^{\circ}$.

1. Определение комплексных чисел

Определение 1. Выражение вида $z = a + bi$, где a и b – действительные числа, а $i^2 = -1$, называется ***комплексным числом;*** i – называется мнимой единицей; a – действительной частью; bi – мнимой частью.

Обозначается: $a = \operatorname{Re} z$, $b = \operatorname{Im} z$.

Например: $z = 5 + 3i$, $\operatorname{Re} z = 5$, $\operatorname{Im} z = 3$;

$z = -2 + 5i$, $\operatorname{Re} z = -2$, $\operatorname{Im} z = 5$.

Замечание. Термин «комплекс» имеет французское происхождение. По правилам французского языка все слова имеют ударение в последнем слоге, поэтому правильно произносить «компле́кс», а значит и числа – «компле́ксные».

Определение 2. Два комплексных числа $z_1 = a_1 + b_1 i$ и $z_2 = a_2 + b_2 i$ называются равными, если $a_1 = a_2$ и $b_1 = b_2$.

◆ Действительные числа можно рассматривать как частный случай комплексных чисел при $b = 0$. Числа, у которых $b \neq 0$, называются мнимыми, если $a = 0$ и $b \neq 0$ – чисто мнимыми.

Например: $z = 5$ – комплексное число, у которого $b = 0$;

$z = 5i$ – чисто мнимое число.

Замечание. Понятия «больше» или «меньше» для комплексных чисел не определяются, то есть комплексные числа нельзя сравнить или сказать о них, положительны они или отрицательны.

2. Арифметические операции над комплексными числами

Пусть даны числа $z_1 = a + bi$ и $z_2 = c + di$.

Сложение

Чтобы сложить два комплексных числа, нужно отдельно сложить их действительные и мнимые части:

$$z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i.$$

Определение 3. Число $-z = -a - bi$ называется противоположным числу $z = a + bi$.

Вычитание

Разность чисел z_1 и z_2 можно рассматривать как сумму чисел z_1 и $-z_2$, то есть z_1 и противоположного z_2:

$$z_1 - z_2 = (a + bi) - (c + di) = (a + bi) + (-c - di) = (a - c) + (b - d)i.$$

Умножение

Умножение комплексных чисел осуществляется по правилу умножения многочлена на многочлен, учитывая что $i^2 = -1$:

$$z_1 \cdot z_2 = (a + bi) \cdot (c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 =$$
$$= ac + adi + bci - bd = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Определение 4. Число $\bar{z} = a - bi$ называется сопряженным числу $z = a + bi$. Числа z и $\bar{z}$ называются взаимно сопряженными.

Например: числа $z = 2 - 3i$ и $\bar{z} = 2 + 3i$ являются сопряженными.

◆ Сумма двух взаимно сопряженных чисел есть число действительное:

$$z + \bar{z} = (a + bi) + (a - bi) = 2a = 2\operatorname{Re} z.$$

Например: сумма чисел $z = 2 - 3i$ и $\bar{z} = 2 + 3i$ равна:

$$z + \bar{z} = (2 - 3i) + (2 + 3i) = (2 + 2) + (-3 + 3)i = 4.$$

◆ Произведение двух взаимно сопряженных чисел – есть число действительное:

$$z \cdot \bar{z} = (a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 - abi + abi - b^2 i^2 =$$
$$= a^2 + b^2 = (\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2.$$

Например: произведение чисел $z = 2 - 3i$ и $\bar{z} = 2 + 3i$ равно:

$$z \cdot \bar{z} = (2 - 3i) \cdot (2 + 3i) = 2^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13.$$

Деление

Пусть $z_2 \neq 0$, тогда $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{a + bi}{c + di}$. Домножим числитель и знаменатель на число, сопряженное знаменателю:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{(a+bi)\cdot(c-di)}{(c+di)\cdot(c-di)}=\frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}=\frac{(ac+bd)}{c^2+d^2}+\frac{(bc-ad)}{c^2+d^2}i\,.$$

Примеры 1–4:

1. $(5+3i)+(4-2i)=(5+4)+(3-2)i=9+i$.

2. $(5+3i)-(4-2i)=(5-4)+(3-(-2))i=1+5i$.

3. $(5+3i)\cdot(4-2i)=20-10i+12i+6=26+2i$.

4. $\dfrac{5+3i}{4-2i}=\dfrac{(5+3i)\cdot(4+2i)}{(4-2i)\cdot(4+2i)}=\dfrac{20+10i+12i-6}{16+4}=\dfrac{14+22i}{20}=\dfrac{7}{10}+\dfrac{11}{10}i$.

Свойства арифметических операций над комплексными числами

1°. $z_1+z_2=z_2+z_1$ – коммутативность сложения.

2°. $(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3)$ – ассоциативность сложения.

3°. $z_1\cdot z_2=z_2\cdot z_1$ – коммутативность умножения.

4°. $(z_1\cdot z_2)\cdot z_3=z_1\cdot(z_2\cdot z_3)$ – ассоциативность умножения.

5°. $z_1\cdot(z_2+z_3)=z_1\cdot z_2+z_1\cdot z_3$ – дистрибутивность умножения относительно сложения.

◆ Докажем свойство 5°.

Пусть $z_1=x_1+y_1i$, $z_2=x_2+y_2i$, $z_3=x_3+y_3i$,
тогда

$$\begin{gathered}z_1\cdot(z_2+z_3)=(x_1+y_1i)\cdot[(x_2+y_2i)+(x_3+y_3i)]=\\=(x_1+y_1i)\cdot[(x_2+x_3)+(y_2+y_3)i]=\\=x_1\cdot(x_2+x_3)+x_1\cdot(y_2+y_3)i+y_1\cdot(x_2+x_3)i+y_1\cdot(y_2+y_3)i^2=\\=x_1x_2+x_1x_3+x_1y_2i+x_1y_3i+y_1x_2i+y_1x_3i-y_1y_2-y_1y_3=\\=(x_1x_2+x_1x_3-y_1y_2-y_1y_3)+(x_1y_2+x_1y_3+y_1x_2+y_1x_3)i.\end{gathered}$$

С другой стороны,

$$\begin{gathered}z_1\cdot z_2+z_1\cdot z_3=(x_1+y_1i)\cdot(x_2+y_2i)+(x_1+y_1i)\cdot(x_3+y_3i)=\\=(x_1x_2-y_1y_2)+(x_1y_2+y_1x_2)i+(x_1x_3+y_1y_3)+(x_1y_3+y_1x_3)i=\\=(x_1x_2+x_1x_3-y_1y_2-y_1y_3)+(x_1y_2+x_1y_3+y_1x_2+y_1x_3)i.\end{gathered}$$

Таким образом, $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$, что и требовалось доказать.

Свойства 1°–4° доказываются аналогично.

3. Возведение комплексного числа в степень

Рассмотрим различные степени мнимой единицы i:

$$
\begin{aligned}
&i^0 = 1, && i^4 = -i \cdot i = 1,\\
&i^1 = i, && i^5 = 1 \cdot i = i,\\
&i^2 = i \cdot i = -1, && i^6 = i \cdot i = -1,\\
&i^3 = -1 \cdot i = -i, && i^7 = -1 \cdot i = -i \ldots.
\end{aligned}
$$

Таким образом, из данной группы последовательных степеней числа i видно, что имеет место периодичность с периодом, равным 4. Учитывая это, можно определить любую степень числа i:

$$
\boxed{i^n = i^{4q+r} = \begin{cases} 1, \text{ если } r = 0, \\ i, \text{ если } r = 1, \\ -1, \text{ если } r = 2, \\ -i, \text{ если } r = 3. \end{cases}} \tag{1}
$$

Примеры 5–6:

5. $i^{823} = i^{4\cdot 205+3} = i^3 = -i$.

6. $i^{-141} = \dfrac{1}{i^{141}} = \dfrac{1}{i^{4\cdot 35+1}} = \dfrac{1}{i} = -i$.

◆ Возвести комплексное число в любую степень можно последовательным умножением этого числа самого на себя.

Пример 7. Найти $(1+2i)^3$.

Решение:

$$
\begin{aligned}
(1+2i)^3 &= (1+2i)\cdot(1+2i)\cdot(1+2i) = (1+2i+2i-4)\cdot(1+2i) = \\
&= (-3+4i)\cdot(1+2i) = -3-6i+4i-8 = -11-2i.
\end{aligned}
$$

Замечание. При возведении комплексного числа в более высокую степень, количество перемножаемых скобок увеличивается, а, значит, процесс возведения комплексного числа в степень усложняется и становится неудобным.

4. Алгебраическая форма комплексного числа

Определение 5. Форма записи $a+bi$ для комплексных чисел называется ***алгебраической.***

Например: числа, записанные в алгебраической форме: $13-i$; $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$; $-i$; 5; $\frac{1}{5}i$; числа, записанные не в алгебраической форме: $\frac{13}{i}$; $\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$; $\frac{1}{2+3i}$; i^2; $\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3$.

◆ Любое комплексное число можно записать в алгебраической форме.

Примеры 8–11:

8. $\frac{13}{i}=\frac{13\cdot(-i)}{i\cdot(-i)}=\frac{-13i}{1}=-13i$.

9. $\frac{1+\sqrt{3}i}{2}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

10. $\frac{1}{2+3i}=\frac{2-3i}{(2+3i)(2-3i)}=\frac{2-3i}{4+9}=\frac{2-3i}{13}=\frac{2}{13}-\frac{3}{13}i$.

11. $i^2=-1$.

5. Геометрическая и векторная интерпретация комплексного числа

Геометрически комплексные числа представляются точками плоскости в прямоугольно-декартовой системе координат. Числу $z=a+bi$ соответствует точка на плоскости с координатами (a,b) (рис. 1). Числу $0+0i$ соответствует начало координат. Все действительные числа $a+0i$ расположены на оси *OX*, все чисто мнимые числа $0+bi$ – на оси *OY*. Плоскость *XOY* называется ***комплексной плоскостью.*** Ось *OX* – ***действительной осью,*** ось *OY* называется ***мнимой осью.***

Наряду с геометрическим представлением комплексных чисел существует векторное. В этом случае каждому комплексному $z=a+bi$ ставится в соответствие вектор

$\mathbf{z}=\{a,b\}$ (рис. 2). Числу $0+0i$ соответствует нуль-вектор $\overline{0}=\{0,0\}$.

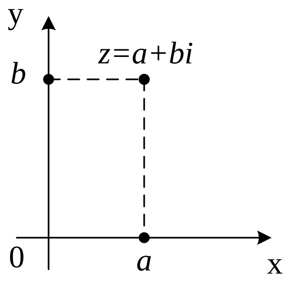


Рис. 1

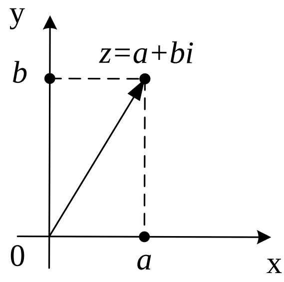


Рис. 2

6. Тригонометрическая форма комплексного числа

Определение 6. Модулем комплексного числа $z=a+bi$ называется длина соответствующего этому числу вектора:

$$\boxed{|\,z\,|=|\,a+bi\,|=\sqrt{a^2+b^2}.} \tag{2}$$

Примеры 12–13:

12. $z=2+3i$, $|\,z\,|=|\,2+3i\,|=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}$.

13. $z=\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{2}}{3}i$, $|z|=\left|\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{2}}{3}i\right|=\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{2}{9}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

◆ Комплексные числа, имеющие один и тот же модуль $|\,z\,|=r$, соответствуют точкам комплексной плоскости, расположенным на окружности радиуса r с центром в начале координат (рис. 3).

Например: числа $z_1=1+\sqrt{3}i$; $z_2=-2i$; $z_3=-\sqrt{2}+\sqrt{2}i$; $z_4=-2$ имеют один и тот же модуль $r_1=r_2=r_3=r_4=2$ (рис. 4).

Определение 7. Аргументом φ комплексного числа $z=a+bi$ ($z\neq 0$) называется величина угла между положительным направлением оси OX и вектором, соответствующим числу z (рис. 5).

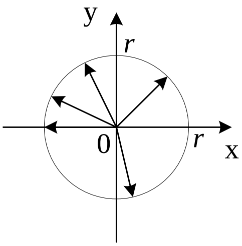


Рис. 3

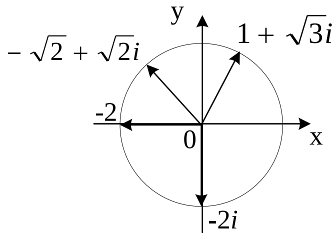


Рис. 4

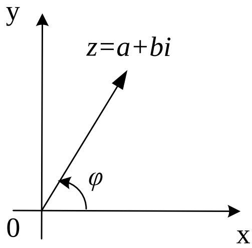


Рис. 5

◆ Аргумент комплексного числа определяется неоднозначно. Любые два аргумента комплексного числа отличаются на $2\pi k$.

Например: аргументами числа $z=1+i$ являются углы: $\varphi_1=\dfrac{\pi}{4}$; $\varphi_2=\dfrac{\pi}{4}+2\pi=\dfrac{9\pi}{4}$; $\varphi_3=\dfrac{9\pi}{4}+2\pi=\dfrac{17\pi}{4}$ и каждый из углов $\varphi_k=\dfrac{\pi}{4}+2\pi k,\ k\in Z$.

Для обозначения множества всех аргументов принято обозначение:

$$\boxed{\arg z=\varphi+2\pi k,\ k\in Z.} \qquad (3)$$

◆ Из всех значений аргументов выделяется тот, который удовлетворяет условию $0<\varphi\le 2\pi$, обозначается Arg z и называется главным значением аргумента z.

Например: для комплексного числа $z=1+i$, $\operatorname{Arg} z=\dfrac{\pi}{4}$ – главное значение аргумента, $\arg z=\dfrac{\pi}{4}+2\pi k$, $k\in Z$ – множество значений аргумента.

◆ Заданием модуля и аргумента комплексное число определяется однозначно.

Выразим a и b (из прямоугольного треугольника) через модуль (гипотенузу) числа z и его аргумент (острый угол) (рис. 6):

$$a=r\cdot\cos\varphi,$$

$$b=r\cdot\sin\varphi.$$

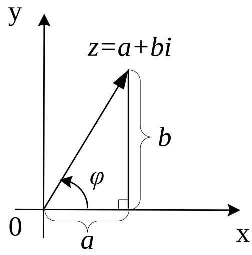


Рис. 6

Подставив эти значения в $z = a + bi$, получим:

$$\boxed{z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).} \tag{4}$$

Определение 8. Форма записи

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

где $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\cos\varphi = \dfrac{a}{r}$, $\sin\varphi = \dfrac{b}{r}$ для комплексного числа $z = a + bi$ называется тригонометрической.

Обобщенная запись комплексного числа в тригонометрической форме

$$\boxed{z = r[\cos(\varphi + 2\pi k) + i\sin(\varphi + 2\pi k)],\ k \in Z.} \tag{5}$$

Например: числа, записанные в тригонометрической форме: $2\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$, $\sqrt{3}(\cos\pi + i\sin\pi)$, $\cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}$.

Числа, записанные в форме, не являющейся тригонометрической: $2i(\cos\pi + i\sin\pi)$, $\cos\dfrac{\pi}{3} - i\sin\dfrac{\pi}{3}$, $\cos\pi + i\sin\dfrac{\pi}{2}$, $i\cos\pi + \sin\pi$.

Определение 9. Два комплексных числа $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ и $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, записанных в тригонометрической форме равны, если $r_2 = r_2$ и $\varphi_1 = \varphi_2 + 2\pi k$, $k \in Z$.

◆ Любое комплексное число можно записать в тригонометрической форме, пользуясь формулами:

$$\boxed{r = \sqrt{a^2 + b^2},\ \cos\varphi = \frac{a}{r},\ \sin\varphi = \frac{b}{r}.} \tag{6}$$

Пример 14. Найти тригонометрическую форму числа:

$$z = \sqrt{2} + \sqrt{2}i.$$

Решение:

$$r = \sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{4} = 2,\ \cos\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \sin\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\arg z = \frac{\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in Z,$$

$$\operatorname{Arg} z = \frac{\pi}{4} \text{ (угол I четверти)},$$

$z = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ – тригонометрическая форма числа

$$z = \sqrt{2} + \sqrt{2}i.$$

7. Операции над комплексными числами, заданными в тригонометрической форме

Операции сложения и вычитания удобно производить над числами, заданными в алгебраической форме. Тригонометрическая форма записи комплексных чисел оказывается очень удобной при умножении, делении и возведении в степень.

Пусть даны комплексные числа:

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \text{ и } z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2).$$

Умножение

$$z_1 \cdot z_2 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\cdot r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$$

$$= r_1 \cdot r_2(\cos\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 + i\cos\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2 + i\sin\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2) =$$

$$= r_1 \cdot r_2[(\cos\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2) + i(\cos\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2 + \sin\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2)] =$$

$$= r_1 \cdot r_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)].$$

◆ При умножении двух комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме, их модули перемножаются, а аргументы складываются:

$$\boxed{z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)].} \qquad (7)$$

Пример 15. Найти произведение чисел:

$$z_1 = \cos 75^\circ + i\sin 75^\circ \text{ и } z_2 = 2(\cos 15^\circ + i\sin 15^\circ).$$

Решение:

$$z_1 \cdot z_2 = 1\cdot 2\cdot[\cos(75^\circ + 15^\circ) + i\sin(75^\circ + 15^\circ)] =$$

$$= 2(\cos 90^\circ + i\sin 90^\circ) = 2i.$$

Деление

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)}=\frac{r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)\cdot(\cos\varphi_2-i\sin\varphi_2)}{r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)\cdot(\cos\varphi_2-i\sin\varphi_2)}=$$

$$=\frac{r_1\cdot(\cos\varphi_1\cdot\cos\varphi_2-i\cos\varphi_1\cdot\sin\varphi_2+i\sin\varphi_1\cdot\cos\varphi_2+\sin\varphi_1\cdot\sin\varphi_2)}{r_2(\cos^2\varphi_2+\sin^2\varphi_2)}=$$

$$=\frac{r_1}{r_2}\cdot[(\cos\varphi_1\cdot\cos\varphi_2+\sin\varphi_1\cdot\sin\varphi_2)+i(\sin\varphi_1\cdot\cos\varphi_2-\cos\varphi_1\cdot\sin\varphi_2)]=$$

$$=\frac{r_1}{r_2}\cdot[\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)].$$

◆ Модуль частного двух комплексных чисел равен частному их модулей, а аргумент равен разности их аргументов:

$$\boxed{\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}\cdot[\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)].}\qquad(8)$$

Пример 16. Найти частное чисел:

$$z_1=\cos75^\circ+i\sin75^\circ \text{ и } z_2=2(\cos15^\circ+i\sin15^\circ).$$

Решение:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{1}{2}[\cos(75^\circ-15^\circ)+i\sin(75^\circ-15^\circ)]=$$

$$=\frac{1}{2}(\cos60^\circ+i\sin60^\circ)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{1}{4}+i\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Возведение в степень

Пусть $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$. Возведем z последовательно во вторую, в третью, …, в n-ю степени. Для этого воспользуемся формулой для умножения комплексных чисел в тригонометрической форме:

$$z^2=r\cdot r\cdot[\cos(\varphi+\varphi)+i\sin(\varphi+\varphi)],$$

$$z^3=r\cdot r\cdot r\cdot[\cos(\varphi+\varphi+\varphi)+i\sin(\varphi+\varphi+\varphi)],$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$z^n=\underbrace{r\cdot r\cdot\ldots\cdot r}_{n}\cdot\left[\cos\left(\underbrace{\varphi+\varphi+\ldots+\varphi}_{n}\right)+i\sin\left(\underbrace{\varphi+\varphi+\ldots+\varphi}_{n}\right)\right].$$

Отсюда

$$\boxed{z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).} \qquad (9)$$

◆ Формула (9) называется ***формулой Муавра.*** С ее помощью любое комплексное число можно возвести в какую угодно целую степень.

Пример 17. Найти пятую степень числа:

$$z = 3(\cos\pi + i\sin\pi).$$

Решение:

$$z^5 = 3^5(\cos 5\pi + i\sin 5\pi) = 243(\cos 5\pi + i\sin 5\pi),$$

но так как $0 < \operatorname{Arg} z \le 2\pi$, то $\varphi = 5\pi - 2\pi - 2\pi = \pi$,

$$z^5 = 243(\cos\pi + i\sin\pi).$$

Извлечение корня

Определение 10. Корнем степени n из комплексного числа ω называется число z такое, что $z^n = \omega$ и обозначается: $z = \sqrt[n]{\omega}$.

Пусть

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),\ \omega = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha),$$

тогда

$$z^n = \omega \Rightarrow r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha).$$

По определению 9 $z^n = \omega$ тогда, когда $r^n = \rho$ и $n\varphi = \alpha + 2\pi k$, $k \in Z$ или $r = \sqrt[n]{\rho}$ и $\varphi = \dfrac{\alpha}{n} + \dfrac{2\pi}{n}k$, $k \in Z$.

Таким образом,

$$\boxed{z_k = \sqrt[n]{\rho}\left[\cos\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right)\right].} \qquad (10)$$

Очевидно, что при $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ получим разные значения $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$. Если $k = n$, то

$$z_n = \sqrt[n]{\rho}\left[\cos\left(\frac{\alpha}{n} + 2\pi\right) + i\sin\left(\frac{\alpha}{n} + 2\pi\right)\right],$$

а это равно z_0 ; если $k > n$, то корни комплексного числа будут повторяться: $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$. Следовательно, корень n-й из комплексного числа имеет n различных значений, имеющих один и тот же модуль, но разные значения аргумента.

Пример 18. Найти $\sqrt[4]{\omega}$, если

$$\omega = 16\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right).$$

Решение:

$$z_k = \sqrt[4]{16}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2\cdot 4} + \frac{2\pi k}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2\cdot 4} + \frac{2\pi k}{4}\right)\right],\ k = 0, 1, 2, 3;$$

$$z_0 = 2\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right),$$

$$z_1 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{8} + i\sin\frac{5\pi}{8}\right),$$

$$z_2 = 2\left(\cos\frac{9\pi}{8} + i\sin\frac{9\pi}{8}\right),$$

$$z_3 = 2\left(\cos\frac{13\pi}{8} + i\sin\frac{13\pi}{8}\right).$$

Геометрическая интерпретация корней *n*-й степени из комплексного числа

Выше было показано, что корень n-й степени из комплексного числа имеет n значений, имеющих один и тот же модуль и разные значения аргумента. Так как все числа z_k имеют одинаковые модули, то они соответствуют точкам комплексной плоскости, расположенным на окружности с радиусом $\sqrt[n]{\rho}$ и центром в начале координат (см. рис. 3). Аргументы чисел z_k равны $\alpha + \frac{2\pi k}{n}$, $k = 0, 1, 2, ..., n-1$, то есть каждый последующий отличается от предыдущего на $\frac{2\pi}{n}$. Следовательно, комплексные числа, являющиеся корнями степени n из комплексного числа ω, соответствуют точкам комплексной плоскости, расположенным в вершинах правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса $\sqrt[n]{\rho}$ с центром в начале координат.

Например: для числа $\omega = 16\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$ корни четвертой степени имеют вид:

$$z_k = \sqrt[4]{16}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2\cdot 4} + \frac{2\pi k}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2\cdot 4} + \frac{2\pi k}{4}\right)\right],\ k = 0, 1, 2, 3.$$

Точки z_0, z_1, z_2, z_3 расположены в вершинах квадрата, вписанного в окружность с радиусом, равным двум и центром в начале координат (рис. 7):

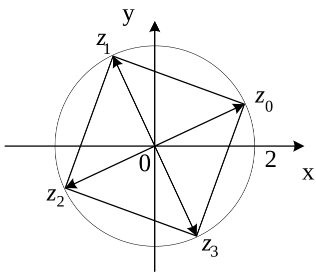


Рис. 7

$$z_0 = 2\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right),$$

$$z_1 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{8} + i\sin\frac{5\pi}{8}\right),$$

$$z_2 = 2\left(\cos\frac{9\pi}{8} + i\sin\frac{9\pi}{8}\right),$$

$$z_3 = 2\left(\cos\frac{13\pi}{8} + i\sin\frac{13\pi}{8}\right).$$

◆ Вычисление рациональной степени комплексного числа имеет существенные отличия от нахождения рациональной степени действительного числа:

1) операция возведения комплексного числа в рациональную степень многозначна;

2) равенство $z^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{z^m} = \left(\sqrt[n]{z}\right)^m$ верно при условии, что m и n взаимно просты;

3) сокращение дроби в показателе степени приводит к изменению числа корней: $z^{\frac{mk}{nk}} \neq z^{\frac{m}{n}}$ $\left(z \neq z^{\frac{m}{n}}\right)$;

4) возведение комплексного числа z в рациональную степень $\frac{p}{q}$ не рассматривается, если НОД$(n; p) \neq 1$.

8. Корни из единицы

Рассмотрим число $z = 1$. Будем считать его комплексным. В тригонометрической форме оно имеет вид: $z = \cos 0 + i \sin 0$.

Найдем корень n-й степени из z:

$$\sqrt[n]{z} = \varepsilon_k \Rightarrow$$

$$\varepsilon_k = \cos\left(0 + \frac{2\pi k}{n}\right) + i \sin\left(0 + \frac{2\pi k}{n}\right), \; k = 0, 1, \ldots n-1;$$

$$\varepsilon_k = \cos\frac{2\pi k}{n} + i \sin\frac{2\pi k}{n}, \; k = 0, 1, \ldots n-1.$$

Пример 19. Найти $\sqrt[3]{1}$.

Решение:

$$\varepsilon_k = \cos\frac{2\pi k}{3} + i \sin\frac{2\pi k}{3}, \; k = 0, 1, 2;$$

$$\varepsilon_0 = \cos 0 + i \sin 0 = 1;$$

$$\varepsilon_1 = \cos\frac{2\pi}{3} + i \sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i;$$

$$\varepsilon_2 = \cos\frac{4\pi}{3} + i \sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i.$$

Теорема 1. **Все значения корня *n*-й степени из комплексного числа *z* можно получить, умножив одно из значений этого корня на каждый из корней *n*-й степени из единицы.**

Пример 20. Найти $\sqrt[3]{i}$.

Решение:

$$i = \cos\frac{\pi}{2} + i \sin\frac{\pi}{2},$$

$$z_0 = \cos\frac{\pi}{6} + i \sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i.$$

На основании теоремы 1:

$$z_1 = z_0 \cdot \varepsilon_1 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i\right) \cdot \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right) =$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3}{4} i - \frac{1}{4} i - \frac{\sqrt{3}}{4} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i,$$

$$z_2 = z_0 \cdot \varepsilon_2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) \cdot \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) =$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{3}{4}i - \frac{1}{4}i + \frac{\sqrt{3}}{4} = -i.$$

9. Показательная форма комплексного числа

Для действительного числа x показательная функция разлагается в степенной ряд:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \ldots .$$

Аналогично для чисто мнимого показателя:

$$e^{yi} = 1 + \frac{yi}{1!} + \frac{(yi)^2}{2!} + \frac{(yi)^3}{3!} + \frac{(yi)^4}{4!} + \ldots = 1 + \frac{y}{1!}i - \frac{y^2}{2!} - \frac{y^3}{3!}i + \frac{y^4}{4!} + \ldots =$$

$$= \left(\underbrace{1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + \ldots}_{\cos y}\right) + \left(\underbrace{y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \frac{y^7}{7!} + \ldots}_{\sin y}\right)i.$$

Так как в первой скобке имеем разложение в степенной ряд функции $\cos y$, а во второй – $\sin y$, то

$$e^{yi} = \cos y + i \sin y .$$

Заменим y на $(-y)$:

$$e^{-yi} = \cos y - i \sin y .$$

Решая систему уравнений:

$$\begin{cases} e^{yi} = \cos y + i \sin y, \\ e^{-yi} = \cos y - i \sin y, \end{cases}$$

получим:

$$\cos y = \frac{e^{yi} + e^{-yi}}{2}, \quad \sin y = \frac{e^{yi} - e^{-yi}}{2i} .$$

Для комплексного числа $z = x + yi$ имеем:

$$\boxed{z = r(\cos\varphi + i \sin\varphi) = r \cdot e^{\varphi i}.} \qquad (11)$$

Поэтому

$$e^{z}=e^{x+yi}=e^{x}\cdot e^{yi}=e^{x}(\cos y+i\sin y),$$

где e^{x} – модуль; y – аргумент.

Функция e^{z} – периодическая с периодом $2\pi i$, так как

$$e^{z+2\pi ki}=e^{z}\cdot e^{2\pi ki}=e^{z}(\cos 2\pi k+i\sin 2\pi k)=e^{z}\cdot 1=e^{z},\; k\in Z.$$

Пример 21. Вычислить $e^{-\frac{\pi}{2}i}$.

Решение:

$$e^{-\frac{\pi}{2}i}=\cos\frac{\pi}{2}-i\sin\frac{\pi}{2}=-i.$$

10. Решение квадратных уравнений

Решение квадратных уравнений с помощью дискриминанта

Пусть дано квадратное уравнение

$$\boxed{ax^{2}+bx+c=0,\, a\neq 0.} \tag{12}$$

Дискриминант уравнения равен:

$$D=b^{2}-4ac.$$

Имеют место три случая:

1) $D>0$, тогда уравнение имеет *два различных действительных* корня:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a};$$

2) $D=0$, тогда уравнение имеет *два равных действительных* корня:

$$x_{1,2}=\frac{-b}{2a};$$

3) $D<0$, тогда уравнение имеет *два комплексных сопряженных* корня:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{-D}}{2a}=\frac{-b\pm i\sqrt{D}}{2a}.$$

◆ Таким образом, квадратное уравнение всегда имеет два корня. Это утверждение можно распространить и на уравнения высших степеней: уравнение всегда имеет столько корней, какова его степень. Например, уравнение пятой степени будет иметь пять корней.

Пример 22. Решить квадратные уравнения:

а) $x^2 - x - 2 = 0$;

б) $4x^2 + 12x + 9 = 0$;

в) $x^2 - 10x + 29 = 0$.

Решение:

а) $x^2 - x - 2 = 0$, $D = (-1)^2 - 4 \cdot (-2) = 1 + 8 = 9 > 0$, уравнение имеет два различных действительных корня:

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{9}}{2} = \frac{1+3}{2} = \frac{4}{2} = 2, \quad x_2 = \frac{1-\sqrt{9}}{2} = \frac{1-3}{2} = \frac{-2}{2} = -1;$$

б) $4x^2 + 12x + 9 = 0$, $D = 12^2 - 4 \cdot 4 \cdot 9 = 144 - 144 = 0$, уравнение имеет два равных действительных корня:

$$x = \frac{-12 \pm 0}{2 \cdot 4} = \frac{-12}{8} = -\frac{3}{2};$$

в) $x^2 - 10x + 29 = 0$, $D = (-10)^2 - 4 \cdot 29 = 100 - 116 = -16 < 0$, уравнение имеет два комплексных сопряженных корня:

$$x_1 = \frac{10+\sqrt{-16}}{2} = \frac{10+4i}{2} = 5+2i, \quad x_2 = \frac{10-\sqrt{-16}}{2} = \frac{10-4i}{2} = 5-2i.$$

Теорема Виета

Определение 11. Квадратное уравнение (12) называется приведенным, если $a = 1$ и записывается:

$$x^2 + px + q = 0. \qquad (13)$$

Теорема 2 (Виета). **Сумма корней квадратного уравнения (13) равна $-p$, а их произведение равно q:**

$$\boxed{\begin{cases} x_1 + x_2 = -p, \\ x_1 \cdot x_2 = q. \end{cases}} \qquad (14)$$

Пример 23. Решить уравнение $x^2 - 4x + 20 = 0$ с помощью теоремы Виета (уравнение имеет комплексные корни).

Решение: по теореме Виета:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 4, \\ x_1 \cdot x_2 = 20. \end{cases}$$

Так как уравнение имеет комплексные корни, то пусть они имеют вид:

$$x_1 = a + bi \text{ и } x_2 = a - bi.$$

Тогда

$$\begin{cases} (a+bi)+(a-bi)=4, \\ (a+bi)\cdot(a-bi)=20. \end{cases}$$

Раскрыв скобки и приведя подобные слагаемые, получим:

$$\begin{cases} 2a = 4, \\ a^2 + b^2 = 20. \end{cases}$$

Из первого уравнения найдем $a = 2$. Подставляя найденное значение во второе уравнение, получим $b = \pm 4$.

Таким образом,

$$x_1 = 2 + 4i \text{ и } x_2 = 2 - 4i.$$

11. Решение кубических уравнений. Формула Кардано

Определение 12. Уравнение $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ называется ***кубическим.***

Рассмотрим частный случай кубического уравнения, у которого коэффициент при третьей степени равен 1, а коэффициент при второй степени равен 0:

$$\boxed{x^3 + px + q = 0.} \qquad (15)$$

Для решения уравнений вида (15) используется формула Кардано:

$$\boxed{x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}.} \qquad (16)$$

Применяя формулу (16), нужно для каждого из трех значений корня

$$\alpha = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

брать то его значение

$$\beta=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}\ ,$$

для которого выполняется условие

$$\alpha\cdot\beta=-\frac{p}{3}\ .$$

Пример 24. Решить кубическое уравнение:

$$x^3-6x-4=0\ .$$

Решение:

$$x=\sqrt[3]{2+\sqrt{4-8}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{4-8}}=$$

$$=\sqrt[3]{2+\sqrt{-4}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-4}}=\sqrt[3]{2+2i}+\sqrt[3]{2-2i}.$$

Найдем тригонометрические формы чисел $2+2i$ и $2-2i$:

$$2+2i=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right);$$

$$2-2i=2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right).$$

Извлечем корни третьей степени из данных чисел:

$$\alpha=\sqrt[3]{2+2i}=\sqrt[3]{2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)}=$$

$$=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}+\frac{2\pi k}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}+\frac{2\pi k}{3}\right)\right),$$

$$k=0,\ 1,\ 2\ ;$$

$$\beta=\sqrt[3]{2-2i}=\sqrt[3]{2\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)}=$$

$$=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{12}+\frac{2\pi k_1}{3}\right)+i\sin\left(\frac{7\pi}{12}+\frac{2\pi k_1}{3}\right)\right),$$

$$k_1=0,\ 1,\ 2\,.$$

Для $k=0$, $k_1=2$ получим:

$$x_1=\sqrt[3]{2+2i}+\sqrt[3]{2-2i}=$$

$$=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)+\sqrt{2}\left(\cos\frac{23\pi}{12}+i\sin\frac{23\pi}{12}\right)=$$

$$=\sqrt{2}\left[\left(\cos\frac{\pi}{12}+\cos\frac{23\pi}{12}\right)+i\left(\sin\frac{\pi}{12}+\sin\frac{23\pi}{12}\right)\right]=$$

$$=\sqrt{2}\left(2\cos\pi\cos\frac{11\pi}{12}+i\cdot 2\sin\pi\cos\frac{11\pi}{12}\right)=$$

$$=2\sqrt{2}\left(-1\cdot\cos\frac{\frac{11\pi}{6}}{2}+i\cdot 0\right)=2\sqrt{2}(-1)\left(-\sqrt{\frac{1+\cos\frac{11\pi}{6}}{2}}\right)=$$

$$=2\sqrt{2}\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}}=2\sqrt{2}\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}}=2\sqrt{2+\sqrt{3}}=$$

$$=\sqrt{4+2\sqrt{3}}=\sqrt{1+2\sqrt{3}+3}=\sqrt{\left(1+\sqrt{3}\right)^2}=1+\sqrt{3}.$$

Для $k=1$, $k_1=1$

$$x_2=\sqrt[3]{2+2i}+\sqrt[3]{2-2i}=\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)+$$

$$+\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-2.$$

Для $k=2$, $k_1=0$

$$x_3=\sqrt[3]{2+2i}+\sqrt[3]{2-2i}=$$

$$\sqrt{2}\left(\cos\frac{17\pi}{12}+i\sin\frac{17\pi}{12}\right)+\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12}\right)=$$

$$\sqrt{2}\left[\left(\cos\frac{17\pi}{12}+\cos\frac{7\pi}{12}\right)+i\left(\sin\frac{17\pi}{12}+\sin\frac{7\pi}{12}\right)\right]=$$

$$=\sqrt{2}\left(2\cos\pi\cos\frac{5\pi}{12}+i\cdot 2\sin\pi\cos\frac{5\pi}{12}\right)=$$

$$= 2\sqrt{2}\left(-1\cdot\cos\frac{\frac{5\pi}{6}}{2}+i\cdot 0\right) = -2\sqrt{2}\sqrt{\frac{1+\cos\frac{5\pi}{6}}{2}} = -2\sqrt{2}\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} =$$

$$= -2\sqrt{2}\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}} = -2\sqrt{2-\sqrt{3}} = -\sqrt{4-2\sqrt{3}} = -\sqrt{1-2\sqrt{3}+3} =$$

$$= -\sqrt{\left(1-\sqrt{3}\right)^2} = -\sqrt{\left(\sqrt{3}-1\right)^2} = 1-\sqrt{3}.$$

Ответ: $-2, \quad 1\pm\sqrt{3}$.

Замечание. В примере (24) само уравнение имеет только действительные корни, однако при использовании формулы Кардано появляются комплексные числа, т.к. под знаком квадратного корня получились отрицательные числа.

Задачи и упражнения

1. Найти:

а) $\operatorname{Im}\bar{z}$, если $z = \dfrac{i}{1-2i}$;

б) $\operatorname{Re}\bar{z}$, если $z = \left(\dfrac{2-i}{1+i}\right)^3$;

в) $\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z$, если $z = \dfrac{2}{z_1}, z_1 = 1+i$.

2. Выполнить действия:

а) $(2+3i)(3-2i)$;

б) $(5+2i)+(3-4i)$;

в) $(5+2i)(3-4i)$;

г) $(2+i)(3-i)+(2+3i)(3+4i)$;

д) $(2+i)(3+7i)-(1+2i)(5+3i)$;

е) $(4+i)(5+3i)-(3+i)(3-i)$;

ж) $(3-2i)^2$;

з) $(1+i)^3$;

и) $\left(-\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3$;

к) $(2+i)^3+(2-i)^3$;

л) $(3+i)^3-(3-i)^3$.

3. Вычислить:

а) $\dfrac{1+i}{1-i}$;

е) $\dfrac{(5+i)(3+5i)}{2i}$;

б) $\dfrac{2i}{1+i}$;

в) $\dfrac{1+2i}{2+3i}$;

г) $\dfrac{4+3i}{5-2i}$;

д) $\dfrac{(5+i)(7-6i)}{3+i}$;

ж) $\dfrac{(1+3i)(8-i)}{(2+i)^2}$;

з) $\dfrac{(2+i)(4+i)}{1+i}$;

и) $\dfrac{(3-i)(1-4i)}{2-i}$;

к) $\dfrac{(1+i)^5}{(1-i)^3}$.

4. Найти значения выражений:

а) $\dfrac{z_1 z_2}{z_3}$, если $z_1 = 2+i, z_2 = 2-i, z_3 = 4-3i$;

б) $\dfrac{z_1}{z_2 z_3}$, если $z_1 = 1+i, z_2 = \sqrt{3}+i, z_3 = 1+\sqrt{3}i$.

5. Вычислить:

а) i^{77};

б) i^{98};

в) i^{1234};

г) i^{-57};

д) i^{333};

е) i^{-147};

ж) i^{8260};

з) i^{-901};

и) i^{-5023};

к) i^{-298}.

6. Найти тригонометрическую форму чисел:

а) 1;

б) -1;

в) $-i$;

г) i;

д) -2;

е) 5;

ж) $-3i$;

з) $6i$;

и) $-\sqrt{3}i$;

к) $1+i$;

л) $1-i$;

м) $-1+i$;

н) $-1-i$;

о) $2-2i$.

7. Найти тригонометрическую форму чисел:

а) $1+\sqrt{3}i$;

б) $1+\dfrac{\sqrt{3}}{3}i$;

в) $1+\sqrt{3}$;

г) $i+\sqrt{3}i$;

д) $3+3i$;

е) $-3+\sqrt{3}i$.

8. Найти значения корней и дать им геометрическую интерпретацию:

а) $\sqrt[3]{-1}$;

б) $\sqrt[3]{1}$;

в) $\sqrt[3]{i}$;

г) $\sqrt[4]{-1}$;

д) $\sqrt[6]{1}$;

е) $\sqrt[4]{1}$;

ж) $\sqrt{i}$;

з) $\sqrt[4]{-4}$;

и) $\sqrt[6]{64}$;

к) $\sqrt[6]{-27}$.

9. Найти значения корней:

а) $\sqrt{1+i}$;

б) $\sqrt{-3-\sqrt{3}i}$;

в) $\sqrt[3]{-1+i}$;

г) $\sqrt[3]{1+i}$;

д) $\sqrt[3]{2-2i}$.

10. Вычислить:

а) $(\cos 9^\circ + i\sin 9^\circ)^{10}$;

б) $(\cos 10^\circ + i\sin 10^\circ)^{27}$;

в) $(1+i)^{10}$;

г) $(1-\sqrt{3}i)^{6}$;

д) $(-1+i)^{5}$;

е) $(\sqrt{3}+i)^{3}$;

ж) $(1-i)^{6}$;

з) $(2+\sqrt{12}i)^{5}$;

и) $(1+\sqrt{3}i)^{150}$.

11. Вычислить выражения:

а) $\left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^{12}$;

б) $\left(\dfrac{1-\sqrt{3}i}{1+i}\right)^{12}$;

в) $\left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{1-i}\right)^{30}$;

г) $\dfrac{(-1+\sqrt{3}i)^{15}}{(1-i)^{20}} + \dfrac{(-1-\sqrt{3}i)^{15}}{(1+i)^{20}}$.

12. Решить уравнения:

а) $x^2 = -81$;

б) $x^2 = -3$;

в) $x^2 + 0{,}01 = 0$;

г) $9x^2 + 125 = 0$.

13. Найти корни квадратных уравнений:

а) $x^2 - 4x + 5 = 0$;

б) $x^2 + 4x + 13 = 0$;

в) $x^2 - 8x + 41 = 0$;

г) $4x^2 + 4x + 5 = 0$;

д) $16x^2 - 32x + 17 = 0$;

е) $x^2 - 6x + 11 = 0$.

14. Найти действительные *x* и *y* из уравнений:

а) $(2x + y) + (x - y)i = 18 + 3i$;

б) $(6x + y) + (2y - 7x)i = 12 + 5i$.

15. Решить уравнения, используя формулу Кардано:

а) $x^3 + 3x - 4 = 0$;

б) $x^3 + 12x = 0$;

в) $x^3 + 15x - 124 = 0$;

г) $x^3 + 5x - 84 = 0$.

Ответы

1. а) $-\dfrac{1}{5}$; б) $-\dfrac{13}{4}$; в) $\operatorname{Re} z = 1, \operatorname{Im} z = -1$.

2. а) $12+5i$; б) $8-2i$; в) $23-14i$; г) $1+18i$; д) $4i$;
е) $7+17i$; ж) $5-12i$; з) $-2+2i$; и) 1; к) 4; л) $52i$.

3. а) i; б) $1+i$; в) $\dfrac{8}{13}-\dfrac{1}{13}i$; г) $\dfrac{14}{29}+\dfrac{23}{29}i$; д) $10-11i$;

е) $14-5i$; ж) $5+i$; з) $\dfrac{13}{2}-\dfrac{1}{2}i$; и) $\dfrac{11}{5}-\dfrac{27}{5}i$; к) 2.

4. а) $\dfrac{4}{5}+\dfrac{3}{5}i$; б) $\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{4}i$.

5. а) i; б) -1; в) -1; г) $-i$; д) i;
е) i; ж) 1; з) $-i$; и) i; к) -1.

6. а) $\cos 0 + i\sin 0$; б) $\cos\pi + i\sin\pi$; в) $\cos\dfrac{3\pi}{2}+i\sin\dfrac{3\pi}{2}$;

г) $\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}$; д) $2(\cos\pi + i\sin\pi)$; е) $5(\cos 0 + i\sin 0)$;

ж) $3\left(\cos\dfrac{3\pi}{2}+i\sin\dfrac{3\pi}{2}\right)$; з) $6\left(\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)$;

и) $\sqrt{3}\left(\cos\dfrac{3\pi}{2}+i\sin\dfrac{3\pi}{2}\right)$; к) $\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$;

л) $\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{7\pi}{4}+i\sin\dfrac{7\pi}{4}\right)$; м) $\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{3\pi}{4}+i\sin\dfrac{3\pi}{4}\right)$;

н) $\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{5\pi}{4}+i\sin\dfrac{5\pi}{4}\right)$; о) $2\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{7\pi}{4}+i\sin\dfrac{7\pi}{4}\right)$.

7. а) $2\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$; б) $\dfrac{2}{\sqrt{3}}\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$;

в) $(1+\sqrt{3})(\cos 0 + i\sin 0)$; г) $(1+\sqrt{3})\left(\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)$;

д) $3\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$; е) $2\sqrt{3}\left(\cos\dfrac{5\pi}{6}+i\sin\dfrac{5\pi}{6}\right)$.

8. а) $-1, \dfrac{1}{2}\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$; б) $1, -\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$; в) $-i, \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i$;

г) $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\pm\frac{1}{\sqrt{2}}i, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\mp\frac{1}{\sqrt{2}}i$; д) $\pm 1, \pm\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i, \pm\frac{1}{2}\mp\frac{\sqrt{3}}{2}i$;

е) $\pm 1, \pm i$; ж) $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\pm\frac{1}{\sqrt{2}}i$; з) $1\pm i, -1\pm i$;

и) $\pm 2, \pm 1\pm\sqrt{3}i, \pm 1\mp\sqrt{3}i$; к) $\pm\sqrt{3}i, \pm\frac{3}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i, \pm\frac{3}{2}\mp\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

9. а) $\sqrt[4]{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{8}+k\pi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{8}+k\pi\right)\right], k=0,1$;

б) $\sqrt[4]{12}\left[\cos\left(\frac{19\pi}{12}+k\pi\right)+i\sin\left(\frac{19\pi}{12}+k\pi\right)\right], k=0,1$;

в) $\sqrt[6]{2}(\cos\varphi+i\sin\varphi), \varphi=45°, 165°, 285°$;

г) $\sqrt[6]{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3}\right)\right], k=0,1,3$;

д) $\sqrt[6]{2}\left[\cos\left(\frac{7\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{7\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3}\right)\right], k=0,1,3$.

10. а) i; б) $-i$; в) $32i$; г) 64; д) $4(1-i)$; е) $8i$;

ж) $8i$; з) $512(1-\sqrt{3}i)$; и) 2^{150}.

11. а) 1; б) -2^6; в) 2^{15}; г) -64.

12. а) $\pm 9i$; б) $\pm\sqrt{3}i$; в) $\pm 0{,}1i$; г) $\pm\frac{5\sqrt{5}}{3}i$.

13. а) $2\pm i$; б) $-2\pm 3i$; в) $4\pm 5i$; г) $-\frac{1}{2}\pm i$;

д) $1\pm\frac{1}{4}i$; е) $3\pm\sqrt{2}i$.

14. а) $x=7, y=4$; б) $x=1, y=6$.

15. а) $x_1=1$, $x_{2,3}=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{15}i}{2}$;

б) $x_1=0$, $x_{2,3}=\pm 2\sqrt{3}$;

в) $x_1=4$, $x_{2,3}=-2\pm 3\sqrt{3}$;

г) $x_1=4$, $x_{2,3}=-2\pm\sqrt{17}$.

Образец выполнения типового расчета

Дано комплексное число $z=\dfrac{\sqrt{2}}{-1+i}$. Требуется:

а) найти алгебраическую форму z;

б) дать геометрическую и векторную интерпретации числа z;

в) вычислить $z^2+\bar{z}$;

г) найти тригонометрическую форму z;

д) вычислить z^5;

е) вычислить $\sqrt[5]{z}$;

ж) дать геометрическую интерпретацию корней 5-й степени комплексного числа z;

з) найти показательную форму z.

Решение:

а) $z=\dfrac{\sqrt{2}}{-1+i}=\dfrac{\sqrt{2}(-1-i)}{(-1+i)(-1-i)}=\dfrac{-\sqrt{2}-\sqrt{2}i}{2}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$ – алгебраическая форма;

б) геометрически комплексному числу $z=\dfrac{\sqrt{2}}{-1+i}$ соответствует точка с координатами $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2};-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ или вектор $\boldsymbol{z}=\left\{-\dfrac{\sqrt{2}}{2};-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right\}$ (рис. 8);

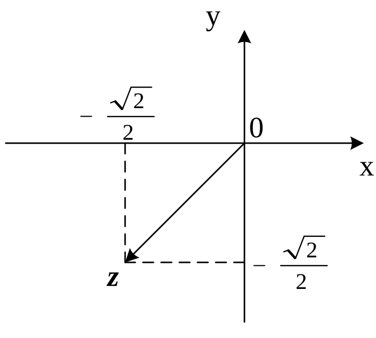


Рис. 8

в) $z^2+\bar{z}=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)=$

$$=\frac{2}{4}+\frac{2}{4}i+\frac{2}{4}i-\frac{2}{4}-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i=$$

$$=i-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i=-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}+2}{2}i;$$

г) $r=\sqrt{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}=\sqrt{1}=1$;

$$\left.\begin{aligned}\cos\varphi=\frac{a}{r}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin\varphi=\frac{b}{r}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}\right\}$$ – угол III четверти, $\varphi=\frac{5\pi}{4}$.

Таким образом, тригонометрическая форма данного числа имеет вид:

$$z=\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4};$$

д) $z^5=1^5\left(\cos 5\cdot\frac{5\pi}{4}+i\sin 5\cdot\frac{5\pi}{4}\right)=\cos\frac{25\pi}{4}+i\sin\frac{25\pi}{4}=$

$$=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i;$$

е) $\omega_k=\sqrt[5]{z}=\sqrt[5]{1}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{4\cdot 5}+\frac{2\pi k}{5}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{4\cdot 5}+\frac{2\pi k}{5}\right)\right]$,

$k=0, 1, 2, 3, 4$;

$$\omega_0=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i;$$

$$\omega_1=\cos\frac{13\pi}{20}+i\sin\frac{13\pi}{20};$$

$$\omega_2=\cos\frac{21\pi}{20}+i\sin\frac{21\pi}{20};$$

$$\omega_3=\cos\frac{29\pi}{20}+i\sin\frac{29\pi}{20};$$

$$\omega_4 = \cos\frac{37\pi}{20} + i\sin\frac{37\pi}{20};$$

ж) геометрически корни 5-й степени из данного числа представляют собой точки окружности, образующие правильный пятиугольник (рис. 9);

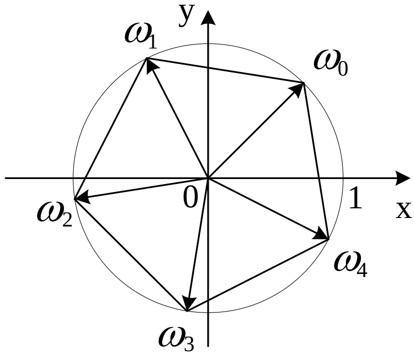


Рис. 9

з) показательная форма данного комплексного числа имеет вид:

$$z = \cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4} = e^{\frac{5\pi}{4}i}.$$

Задания для выполнения типового расчета

Дано комплексное число z. Требуется:

1) найти алгебраическую форму числа z;
2) дать геометрическую интерпретацию числа z;
3) вычислить $z^2 + \bar{z}$;
4) найти тригонометрическую форму числа z;
5) вычислить z^5;
6) вычислить $\sqrt[4]{z}$;
7) дать геометрическую интерпретацию корней 4-й степени комплексного числа z;
8) найти показательную форму числа z.

Варианты для выполнения типового расчета

1. $z = \dfrac{2}{-\sqrt{3} - i}$.

2. $z = \dfrac{8}{1-\sqrt{3}i}$.

3. $z = \dfrac{8}{3\left(-\sqrt{3} + i\right)}$.

4. $z = \dfrac{2\sqrt{2}}{-1+i}$.

5. $z = \dfrac{4}{3\left(1+\sqrt{3}i\right)}$.

6. $z = \dfrac{4}{\sqrt{3} - i}$.

7. $z = \dfrac{4}{3\left(\sqrt{3} - i\right)}$.

8. $z = \dfrac{6\sqrt{2}}{1+i}$.

9. $z = \dfrac{4}{3\left(-\sqrt{3} + i\right)}$.

10. $z = \dfrac{8}{3\left(-1+\sqrt{3}i\right)}$.

11. $z = \dfrac{3\sqrt{2}}{1-i}$.

12. $z = \dfrac{4}{3\left(-1-\sqrt{3}i\right)}$.

13. $z = \dfrac{2\sqrt{2}}{1+i}$.

14. $z = \dfrac{2\sqrt{2}}{-1-i}$.

15. $z = \dfrac{8}{\sqrt{3} + i}$.

16. $z = \dfrac{4}{-1-\sqrt{3}i}$.

17. $z = \dfrac{8}{-1+\sqrt{3}i}$.

18. $z = \dfrac{4}{-\sqrt{3} + i}$.

19. $z = \dfrac{8}{3\left(\sqrt{3} - i\right)}$.

20. $z = \dfrac{4\sqrt{2}}{1+i}$.

21. $z = \dfrac{4}{-\sqrt{3} - i}$.

22. $z = \dfrac{\sqrt{2}}{1-i}$.

23. $z = \dfrac{2}{\sqrt{3} + i}$.

24. $z = \dfrac{4}{1+\sqrt{3}i}$.

25. $z = \dfrac{4}{-1+\sqrt{3}i}$.

26. $z = \dfrac{3\sqrt{2}}{-1+i}$.

27. $z = \dfrac{8}{3\left(1-\sqrt{3}i\right)}$.

28. $z = \dfrac{4}{\sqrt{3} + i}$.

29. $z = \dfrac{12}{-1-\sqrt{3}i}$.

30. $z = \dfrac{6\sqrt{2}}{-1-i}$.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Основные формулы

Арифметические операции над комплексными числами (в алгебраической форме)

Пусть $z_1 = a + bi$ и $z_2 = c + di$.

1. Сложение: $z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i$.
2. Вычитание: $z_1 - z_2 = (a - c) + (b - d)i$.
3. Умножение: $z_1 \cdot z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$.
4. Деление: $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{(ac + bd)}{c^2 + d^2} + \dfrac{(bc - ad)}{c^2 + d^2} i$.

Возведение мнимой единицы в степень

$$i^n = i^{4q+r} = \begin{cases} 1, \text{ если } r = 0, \\ i, \text{ если } r = 1, \\ -1, \text{ если } r = 2, \\ -i, \text{ если } r = 3. \end{cases}$$

Тригонометрическая форма комплексного числа

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Формулы перехода от алгебраической формы к тригонометрической

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}, \ \cos\varphi = \frac{a}{r}, \ \sin\varphi = \frac{b}{r}.$$

Операции над комплексными числами (в тригонометрической форме)

Пусть
$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$.

1. Умножение: $z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)]$.
2. Деление: $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2} \cdot [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)]$.
3. Возведение в степень (формула Муавра):
$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$
4. Извлечение корня n-й степени:
$$z_k = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right)\right], \ k \in Z, \ k = 0, 1, \ldots, n - 1.$$

Показательная форма комплексного числа

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = r \cdot e^{\varphi i}.$$

Библиографический список

1. Гусак, А.А. Высшая математика: учебник. В 2-х т. Т.1 / А.А. Гусак. – 5-е изд. – Минск: ТетраСистемс, 2004. – 544 с. – Текст: непосредственный.

2. Лунц, Г.Л. Функции комплексного переменного с элементами операционного исчисления: Математическая энциклопедия. В 5-ти т. Т. 2 / Г.Л. Лунц; гл. ред. И.М. Виноградов. – Москва: Сов. энциклопедия, 1979. – 1104 с. – Текст: непосредственный.

3. Пантелеев, А.В. Теория функций комплексного переменного и операционное исчисление в примерах и задачах: учеб. пособие / А.В. Пантелеев. – Москва: Высшая школа, 2001. – 445 с.– Текст: непосредственный.

4. Письменный, Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. Полный курс: курс лекций / Д.Т. Письменный. – 10-е изд., испр. – Москва: Айрис Пресс, 2011. – 608 с. – Текст: непосредственный.

5. Привалов, И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного: учебник / И.И. Привалов. – 15-е изд., стер. – Санкт-Петербург: Лань, 2009. – 432 с. – Текст: непосредственный.

6. Щипачев, В.С. Задачи по высшей математике: учеб. пособие / В.С. Щипачев. – Москва: Высшая школа, 1996. – 304 с. – Текст: непосредственный.

Оглавление

Компьютерная верстка Т.В. Телеляева

Темплан ФГБОУВО «ЗГУ» 2023 г., поз. 43. Подписано в печать 25.01.2023.
Формат 60x84 1/16. Бум. для копир.-мн.ап. Гарнитура *Bookman Old Style.*
Печать плоская. Усл.п.л. 2,5. Уч.-изд.л. 2,5. Тираж 30 экз. Заказ 11.

663310, Норильск, ул. 50 лет Октября, 7. E-mail: RIO@norvuz.ru

Отпечатано с готового оригинал-макета в отделе ЦИТ ФГБОУВО «ЗГУ»