

Документ подписан простой электронной подписью
Информация о владельце:
ФИО: Игнатенко Виталий Иванович
Должность: Проректор по образовательной деятельности и молодежной политике
Дата подписания: 06.02.2023 10:00:00
Уникальный программный ключ:
a49ae343af5448d45d7e3e1e499659da8109ba78

Министерство науки и высшего образования РФ
ФГБОУВО «Заполярный государственный
университет им. Н.М. Федоровского»
Кафедра физико-математических дисциплин

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

Методические указания и типовые расчеты

Норильск 2023

Комплексные числа: метод. указ. и типовые расчеты / сост.: Г.В. Семенов, А.И. Сотников, У.М. Багомедова; Министерство науки и высшего образования РФ, Заполярный гос. ун-т им. Н.М. Федоровского. – Норильск: ЗГУ, 2022. – 40 с. – Библиогр.: с. 37. – Текст: непосредственный.

Методические указания составлены согласно государственному образовательному стандарту и примерным программам дисциплины «Математика».

Предназначены для обучающихся технических направлений бакалавриата и специалитета. Содержат основные сведения о комплексных числах, представлены задания для практических занятий и самостоятельной работы студентов (типовой расчет).

ВВЕДЕНИЕ

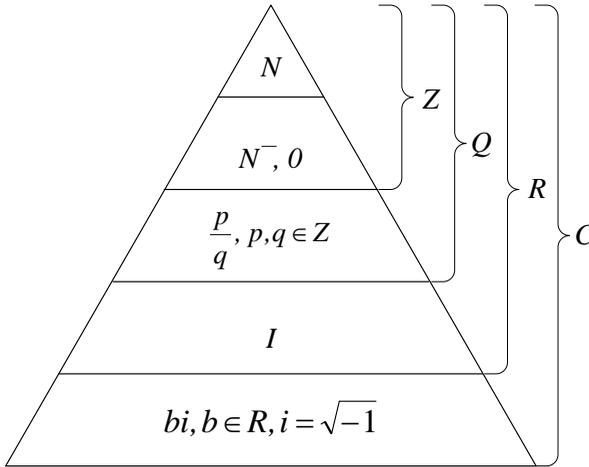
Впервые мнимые величины появились в труде «Великое искусство, или об алгебраических правилах» итальянского учёного Дж. Кардано (1545), который счёл их бесполезными, непригодными к употреблению. Пользу мнимых величин, в частности при решении кубического уравнения в так называемом неприводимом случае (когда действительные корни выражаются через кубические корни из мнимых величин), впервые оценил итальянский учёный Р. Бомбелли (1572). Он дал некоторые простейшие правила действий с комплексными числами. Однако для многих крупных учёных XVII в. алгебраическая и геометрическая сущность мнимых величин представлялась неясной и даже загадочной и мистической. Известно, например, что английский учёный И. Ньютон не включал мнимые величины в понятия числа, а немецкому учёному Г. Лейбницу принадлежит фраза: «Мнимые числа – это прекрасное и чудесное убежище божественного духа, почти что амфибия бытия с небытием».

Задача о выражении корней степени n из данного числа была в основном решена в работах английских учёных А. Муавра (1707, 1724) и Р. Котеса (1722). Символ $i = \sqrt{-1}$ предложил российский учёный Л. Эйлер (1777). Термин «комплексное число» ввёл французский учёный Л. Карно (1803), в употребление он вошёл после работ К. Гаусса (1831).

Полное геометрическое истолкование комплексных чисел и действий над ними появилось впервые в работе датского учёного К. Весселя (1799). Геометрическое представление комплексных чисел называют иногда «диаграммой Аргана», оно вошло в обиход после опубликования в 1806 и 1814 гг. работы швейцарского учёного Ж. Аргана, повторявшей, в основном независимо, выводы К. Весселя.

В настоящее время понятие комплексного числа является самым широким понятием о числе (см. рисунок). Множество комплексных чисел C содержит множество чисто мнимых чисел и множество действительных чисел R . В свою очередь, все действительные числа делятся на рациональные Q и иррациональные I . Совокупность рацио-

нальных чисел состоит из целых Z и дробных чисел. Целые числа – это совокупность натуральных N , нуля и натуральных чисел с отрицательными знаками.



Классификация чисел в математике

Комплексные числа служат основой для так называемой теории функций комплексного переменного, которая позволяет удобно и компактно сформулировать многие математические модели, применяемые в математической физике и в естественных науках – электротехнике, гидродинамике, картографии, квантовой механике, теории колебаний и многих других.

Функции комплексного переменного широко используются в некоторых областях науки и техники потому, что дают в руки исследователя удобный математический аппарат. Ч. Штейнметц (1865–1923) был первым, кто привлек внимание инженеров-электриков к тем практическим преимуществам, которые дают комплексные функции при рассмотрении проблем, связанных с переменным током. Аналогично для упрощения процедуры решения линейных дифференциальных уравнений, возникающих в электротехнике и механике, О. Хевисайд (1850–1925) ввел формальное операционное исчисление, которое ныне вытеснено преобразованиями Лапласа и Фурье, представляющих частные случаи интегрального представления Коши из теории аналитических функций. В связи с этим при вычисле-

нии несобственных действительных интегралов, часто возникающих в практических проблемах, широко используется теория вычетов Коши. Более основательный вклад был внесен теорией комплексных функций в гидродинамику и теорию теплопроводности. В гидродинамике теория функций комплексного переменного используется для решения задач, связанных с установившимся плоско-параллельным течением несжимаемой безвихревой жидкости. В аэродинамике изучение обтекания привело к открытию закона образования подъемной силы крыла самолета.

Данные методические указания призваны помочь студентам технической специальности систематизировать теоретические сведения по теме «Комплексные числа». Для закрепления умений и навыков по данной теме даны задачи и упражнения для практических занятий, которые снабжены ответами, а также задания для типового расчета (30 вариантов). В помощь студенту в приложение помещены основные формулы, необходимые при решении задач.

Определения, теоремы и примеры имеют нумерацию, на которую можно ссылаться при решении заданий. Важнейшие формулы выделены рамками и также имеют номера. Значком \blacklozenge отмечены некоторые важные выводы. Свойства обозначены цифрами со знаком $^\circ$.

1. Определение комплексных чисел

Определение 1. Выражение вида $z = a + bi$, где a и b – действительные числа, а $i^2 = -1$, называется **комплексным числом**; i – называется мнимой единицей; a – действительной частью; bi – мнимой частью.

Обозначается: $a = \operatorname{Re} z$, $b = \operatorname{Im} z$.

Например: $z = 5 + 3i$, $\operatorname{Re} z = 5$, $\operatorname{Im} z = 3$;

$z = -2 + 5i$, $\operatorname{Re} z = -2$, $\operatorname{Im} z = 5$.

Замечание. Термин «комплекс» имеет французское происхождение. По правилам французского языка все слова имеют ударение в последнем слоге, поэтому правильно произносить «комплéкс», а значит и числа – «комплéксные».

Определение 2. Два комплексных числа $z_1 = a_1 + b_1i$ и $z_2 = a_2 + b_2i$ называются равными, если $a_1 = a_2$ и $b_1 = b_2$.

◆ Действительные числа можно рассматривать как частный случай комплексных чисел при $b = 0$. Числа, у которых $b \neq 0$, называются мнимыми, если $a = 0$ и $b \neq 0$ – чисто мнимыми.

Например: $z = 5$ – комплексное число, у которого $b = 0$;
 $z = 5i$ – чисто мнимое число.

Замечание. Понятия «больше» или «меньше» для комплексных чисел не определяются, то есть комплексные числа нельзя сравнить или сказать о них, положительны они или отрицательны.

2. Арифметические операции над комплексными числами

Пусть даны числа $z_1 = a + bi$ и $z_2 = c + di$.

Сложение

Чтобы сложить два комплексных числа, нужно отдельно сложить их действительные и мнимые части:

$$z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i.$$

Определение 3. Число $-z = -a - bi$ называется противоположным числом $z = a + bi$.

Вычитание

Разность чисел z_1 и z_2 можно рассматривать как сумму чисел z_1 и $-z_2$, то есть z_1 и противоположного z_2 :

$$z_1 - z_2 = (a + bi) - (c + di) = (a + bi) + (-c - di) = (a - c) + (b - d)i.$$

Умножение

Умножение комплексных чисел осуществляется по правилу умножения многочлена на многочлен, учитывая что $i^2 = -1$:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (a + bi) \cdot (c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = \\ &= ac + adi + bci - bd = (ac - bd) + (ad + bc)i. \end{aligned}$$

Определение 4. Число $\bar{z} = a - bi$ называется сопряженным числу $z = a + bi$. Числа z и \bar{z} называются взаимно сопряженными.

Например: числа $z = 2 - 3i$ и $\bar{z} = 2 + 3i$ являются сопряженными.

◆ Сумма двух взаимно сопряженных чисел есть число действительное:

$$z + \bar{z} = (a + bi) + (a - bi) = 2a = 2\operatorname{Re} z.$$

Например: сумма чисел $z = 2 - 3i$ и $\bar{z} = 2 + 3i$ равна:

$$z + \bar{z} = (2 - 3i) + (2 + 3i) = (2 + 2) + (-3 + 3)i = 4.$$

◆ Произведение двух взаимно сопряженных чисел — есть число действительное:

$$\begin{aligned} z \cdot \bar{z} &= (a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 - abi + abi - b^2i^2 = \\ &= a^2 + b^2 = (\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2. \end{aligned}$$

Например: произведение чисел $z = 2 - 3i$ и $\bar{z} = 2 + 3i$ равно:

$$z \cdot \bar{z} = (2 - 3i) \cdot (2 + 3i) = 2^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13.$$

Деление

Пусть $z_2 \neq 0$, тогда $\frac{z_1}{z_2} = \frac{a + bi}{c + di}$. Домножим числитель и знаменатель на число, сопряженное знаменателю:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(a+bi) \cdot (c-di)}{(c+di) \cdot (c-di)} = \frac{(ac+bd) + (bc-ad)i}{c^2+d^2} = \frac{(ac+bd)}{c^2+d^2} + \frac{(bc-ad)}{c^2+d^2}i.$$

Примеры 1-4:

1. $(5+3i) + (4-2i) = (5+4) + (3-2)i = 9+i.$
2. $(5+3i) - (4-2i) = (5-4) + (3-(-2))i = 1+5i.$
3. $(5+3i) \cdot (4-2i) = 20 - 10i + 12i + 6 = 26 + 2i.$
4. $\frac{5+3i}{4-2i} = \frac{(5+3i) \cdot (4+2i)}{(4-2i) \cdot (4+2i)} = \frac{20+10i+12i-6}{16+4} = \frac{14+22i}{20} = \frac{7}{10} + \frac{11}{10}i.$

Свойства арифметических операций над комплексными числами

1°. $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ – коммутативность сложения.

2°. $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ – ассоциативность сложения.

3°. $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$ – коммутативность умножения.

4°. $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$ – ассоциативность умножения.

5°. $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$ – дистрибутивность умножения относительно сложения.

◆ Докажем свойство 5°.

Пусть $z_1 = x_1 + y_1i$, $z_2 = x_2 + y_2i$, $z_3 = x_3 + y_3i$,

тогда

$$\begin{aligned} z_1 \cdot (z_2 + z_3) &= (x_1 + y_1i) \cdot [(x_2 + y_2i) + (x_3 + y_3i)] = \\ &= (x_1 + y_1i) \cdot [(x_2 + x_3) + (y_2 + y_3)i] = \\ &= x_1 \cdot (x_2 + x_3) + x_1 \cdot (y_2 + y_3)i + y_1 \cdot (x_2 + x_3)i + y_1 \cdot (y_2 + y_3)i^2 = \\ &= x_1x_2 + x_1x_3 + x_1y_2i + x_1y_3i + y_1x_2i + y_1x_3i - y_1y_2 - y_1y_3 = \\ &= (x_1x_2 + x_1x_3 - y_1y_2 - y_1y_3) + (x_1y_2 + x_1y_3 + y_1x_2 + y_1x_3)i. \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3 &= (x_1 + y_1i) \cdot (x_2 + y_2i) + (x_1 + y_1i) \cdot (x_3 + y_3i) = \\ &= (x_1x_2 - y_1y_2) + (x_1y_2 + y_1x_2)i + (x_1x_3 + y_1y_3) + (x_1y_3 + y_1x_3)i = \\ &= (x_1x_2 + x_1x_3 - y_1y_2 - y_1y_3) + (x_1y_2 + x_1y_3 + y_1x_2 + y_1x_3)i. \end{aligned}$$

Таким образом, $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$, что и требовалось доказать.

Свойства 1°–4° доказываются аналогично.

3. Возведение комплексного числа в степень

Рассмотрим различные степени мнимой единицы i :

$$\begin{aligned} i^0 &= 1, & i^4 &= -i \cdot i = 1, \\ i^1 &= i, & i^5 &= 1 \cdot i = i, \\ i^2 &= i \cdot i = -1, & i^6 &= i \cdot i = -1, \\ i^3 &= -1 \cdot i = -i, & i^7 &= -1 \cdot i = -i \dots \end{aligned}$$

Таким образом, из данной группы последовательных степеней числа i видно, что имеет место периодичность с периодом, равным 4. Учитывая это, можно определить любую степень числа i :

$$i^n = i^{4q+r} = \begin{cases} 1, & \text{если } r = 0, \\ i, & \text{если } r = 1, \\ -1, & \text{если } r = 2, \\ -i, & \text{если } r = 3. \end{cases} \quad (1)$$

Примеры 5–6:

$$\begin{aligned} 5. \quad i^{823} &= i^{4 \cdot 205 + 3} = i^3 = -i. \\ 6. \quad i^{-141} &= \frac{1}{i^{141}} = \frac{1}{i^{4 \cdot 35 + 1}} = \frac{1}{i} = -i. \end{aligned}$$

◆ Возвести комплексное число в любую степень можно последовательным умножением этого числа самого на себя.

Пример 7. Найти $(1 + 2i)^3$.

Решение:

$$\begin{aligned} (1 + 2i)^3 &= (1 + 2i) \cdot (1 + 2i) \cdot (1 + 2i) = (1 + 2i + 2i - 4) \cdot (1 + 2i) = \\ &= (-3 + 4i) \cdot (1 + 2i) = -3 - 6i + 4i - 8 = -11 - 2i. \end{aligned}$$

Замечание. При возведении комплексного числа в более высокую степень, количество перемножаемых скобок увеличивается, а, значит, процесс возведения комплексного числа в степень усложняется и становится неудобным.

4. Алгебраическая форма комплексного числа

Определение 5. Форма записи $a + bi$ для комплексных чисел называется **алгебраической**.

Например: числа, записанные в алгебраической форме: $13 - i$; $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$; $-i$; 5 ; $\frac{1}{5}i$; числа, записанные не в алгебраической форме:

$\frac{13}{i}$; $\frac{1 + \sqrt{3}i}{2}$; $\frac{1}{2 + 3i}$; i^2 ; $\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3$.

◆ Любое комплексное число можно записать в алгебраической форме.

Примеры 8–11:

$$8. \frac{13}{i} = \frac{13 \cdot (-i)}{i \cdot (-i)} = \frac{-13i}{1} = -13i.$$

$$9. \frac{1 + \sqrt{3}i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

$$10. \frac{1}{2 + 3i} = \frac{2 - 3i}{(2 + 3i)(2 - 3i)} = \frac{2 - 3i}{4 + 9} = \frac{2 - 3i}{13} = \frac{2}{13} - \frac{3}{13}i.$$

$$11. i^2 = -1.$$

5. Геометрическая и векторная интерпретация комплексного числа

Геометрически комплексные числа представляются точками плоскости в прямоугольно-декартовой системе координат. Числу $z = a + bi$ соответствует точка на плоскости с координатами (a, b) (рис. 1). Числу $0 + 0i$ соответствует начало координат. Все действительные числа $a + 0i$ расположены на оси OX , все чисто мнимые числа $0 + bi$ – на оси OY . Плоскость XOY называется **комплексной плоскостью**. Ось OX – **действительной осью**, ось OY называется **мнимой осью**.

Наряду с геометрическим представлением комплексных чисел существует векторное. В этом случае каждому комплексному $z = a + bi$ ставится в соответствие вектор

$z = \{a, b\}$ (рис. 2). Число $0 + 0i$ соответствует нуль-вектору $\bar{0} = \{0, 0\}$.

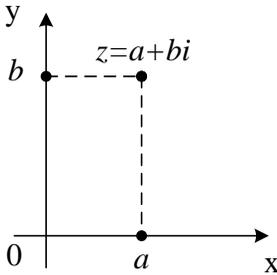


Рис. 1

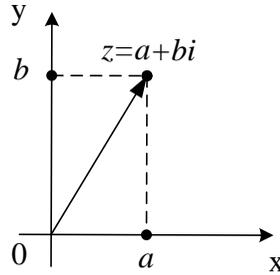


Рис. 2

6. Тригонометрическая форма комплексного числа

Определение 6. Модулем комплексного числа $z = a + bi$ называется длина соответствующего этому числу вектора:

$$\boxed{|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}.} \quad (2)$$

Примеры 12-13:

$$12. z = 2 + 3i, |z| = |2 + 3i| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}.$$

$$13. z = \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{2}}{3}i, |z| = \left| \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{2}}{3}i \right| = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{2}{9}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

◆ Комплексные числа, имеющие один и тот же модуль $|z| = r$, соответствуют точкам комплексной плоскости, расположенным на окружности радиуса r с центром в начале координат (рис. 3).

Например: числа $z_1 = 1 + \sqrt{3}i$; $z_2 = -2i$; $z_3 = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$; $z_4 = -2$ имеют один и тот же модуль $r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = 2$ (рис. 4).

Определение 7. Аргументом φ комплексного числа $z = a + bi$ ($z \neq 0$) называется величина угла между положительным направлением оси Ox и вектором, соответствующим числу z (рис. 5).

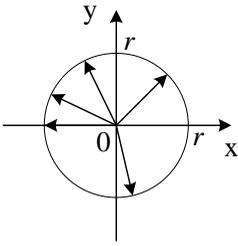


Рис. 3

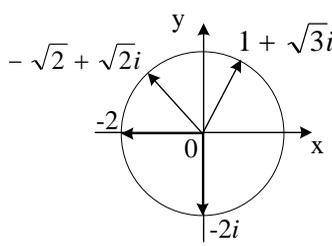


Рис. 4

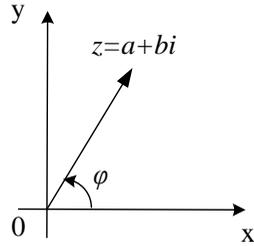


Рис. 5

◆ Аргумент комплексного числа определяется неоднозначно. Любые два аргумента комплексного числа отличаются на $2\pi k$.

Например: аргументами числа $z = 1 + i$ являются углы: $\varphi_1 = \frac{\pi}{4}$; $\varphi_2 = \frac{\pi}{4} + 2\pi = \frac{9\pi}{4}$; $\varphi_3 = \frac{9\pi}{4} + 2\pi = \frac{17\pi}{4}$ и каждый из углов $\varphi_k = \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Для обозначения множества всех аргументов принято обозначение:

$$\boxed{\arg z = \varphi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.} \quad (3)$$

◆ Из всех значений аргументов выделяется тот, который удовлетворяет условию $0 < \varphi \leq 2\pi$, обозначается $\text{Arg } z$ и называется главным значением аргумента z .

Например: для комплексного числа $z = 1 + i$, $\text{Arg } z = \frac{\pi}{4}$ – главное значение аргумента, $\arg z = \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ – множество значений аргумента.

◆ Заданием модуля и аргумента комплексное число определяется однозначно.

Выразим a и b (из прямоугольного треугольника) через модуль (гипотенузу) числа z и его аргумент (острый угол) (рис. 6):

$$a = r \cdot \cos \varphi,$$

$$b = r \cdot \sin \varphi.$$

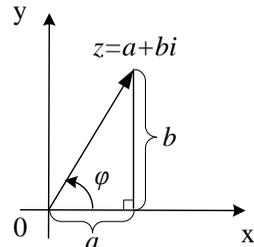


Рис. 6

Подставив эти значения в $z = a + bi$, получим:

$$\boxed{z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).} \quad (4)$$

Определение 8. Форма записи

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi),$$

где $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\cos \varphi = \frac{a}{r}$, $\sin \varphi = \frac{b}{r}$ для комплексного числа $z = a + bi$ называется тригонометрической.

Обобщенная запись комплексного числа в тригонометрической форме

$$\boxed{z = r[\cos(\varphi + 2\pi k) + i \sin(\varphi + 2\pi k)], k \in \mathbb{Z}.} \quad (5)$$

Например: числа, записанные в тригонометрической форме: $2\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)$, $\sqrt{3}(\cos \pi + i \sin \pi)$, $\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}$.

Числа, записанные в форме, не являющейся тригонометрической: $2i(\cos \pi + i \sin \pi)$, $\cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3}$, $\cos \pi + i \sin \frac{\pi}{2}$, $i \cos \pi + \sin \pi$.

Определение 9. Два комплексных числа $z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$ и $z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$, записанных в тригонометрической форме равны, если $r_1 = r_2$ и $\varphi_1 = \varphi_2 + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

◆ Любое комплексное число можно записать в тригонометрической форме, пользуясь формулами:

$$\boxed{r = \sqrt{a^2 + b^2}, \cos \varphi = \frac{a}{r}, \sin \varphi = \frac{b}{r}.} \quad (6)$$

Пример 14. Найти тригонометрическую форму числа:

$$z = \sqrt{2} + \sqrt{2}i.$$

Решение:

$$r = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{4} = 2, \cos \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}, \sin \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\arg z = \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z},$$

$$\text{Arg } z = \frac{\pi}{4} \text{ (угол I четверти),}$$

$$z = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) - \text{тригонометрическая форма числа}$$

$$z = \sqrt{2} + \sqrt{2}i.$$

7. Операции над комплексными числами, заданными в тригонометрической форме

Операции сложения и вычитания удобно производить над числами, заданными в алгебраической форме. Тригонометрическая форма записи комплексных чисел оказывается очень удобной при умножении, делении и возведении в степень.

Пусть даны комплексные числа:

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \text{ и } z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2).$$

Умножение

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \cdot r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = \\ &= r_1 \cdot r_2(\cos\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 + i\cos\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2 + i\sin\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2) = \\ &= r_1 \cdot r_2[(\cos\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2) + i(\cos\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2 + \sin\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2)] = \\ &= r_1 \cdot r_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)]. \end{aligned}$$

◆ При умножении двух комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме, их модули перемножаются, а аргументы складываются:

$$\boxed{z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)]} \quad (7)$$

Пример 15. Найти произведение чисел:

$$z_1 = \cos 75^\circ + i\sin 75^\circ \text{ и } z_2 = 2(\cos 15^\circ + i\sin 15^\circ).$$

Решение:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= 1 \cdot 2 \cdot [\cos(75^\circ + 15^\circ) + i\sin(75^\circ + 15^\circ)] = \\ &= 2(\cos 90^\circ + i\sin 90^\circ) = 2i. \end{aligned}$$

Отсюда

$$z^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi). \quad (9)$$

◆ Формула (9) называется **формулой Муавра**. С ее помощью любое комплексное число можно возвести в какую угодно целую степень.

Пример 17. Найти пятую степень числа:

$$z = 3(\cos \pi + i \sin \pi).$$

Решение:

$$z^5 = 3^5 (\cos 5\pi + i \sin 5\pi) = 243 (\cos 5\pi + i \sin 5\pi),$$

но так как $0 < \text{Arg } z \leq 2\pi$, то $\varphi = 5\pi - 2\pi - 2\pi = \pi$,

$$z^5 = 243 (\cos \pi + i \sin \pi).$$

Извлечение корня

Определение 10. Корнем степени n из комплексного числа ω называется число z такое, что $z^n = \omega$ и обозначается: $z = \sqrt[n]{\omega}$.

Пусть

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi), \quad \omega = \rho(\cos \alpha + i \sin \alpha),$$

тогда

$$z^n = \omega \Rightarrow r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi) = \rho (\cos \alpha + i \sin \alpha).$$

По определению 9 $z^n = \omega$ тогда, когда $r^n = \rho$ и $n\varphi = \alpha + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ или $r = \sqrt[n]{\rho}$ и $\varphi = \frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi}{n}k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Таким образом,

$$z_k = \sqrt[n]{\rho} \left[\cos \left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi k}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi k}{n} \right) \right]. \quad (10)$$

Очевидно, что при $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ получим разные значения z_0, z_1, \dots, z_{n-1} . Если $k = n$, то

$$z_n = \sqrt[n]{\rho} \left[\cos \left(\frac{\alpha}{n} + 2\pi \right) + i \sin \left(\frac{\alpha}{n} + 2\pi \right) \right],$$

а это равно z_0 ; если $k > n$, то корни комплексного числа будут повторяться: z_0, z_1, \dots, z_{n-1} . Следовательно, корень n -й

из комплексного числа имеет n различных значений, имеющих один и тот же модуль, но разные значения аргумента.

Пример 18. Найти $\sqrt[4]{\omega}$, если

$$\omega = 16 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right).$$

Решение:

$$z_k = \sqrt[4]{16} \left[\cos \left(\frac{\pi}{2 \cdot 4} + \frac{2\pi k}{4} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{2 \cdot 4} + \frac{2\pi k}{4} \right) \right], \quad k = 0, 1, 2, 3;$$

$$z_0 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8} \right),$$

$$z_1 = 2 \left(\cos \frac{5\pi}{8} + i \sin \frac{5\pi}{8} \right),$$

$$z_2 = 2 \left(\cos \frac{9\pi}{8} + i \sin \frac{9\pi}{8} \right),$$

$$z_3 = 2 \left(\cos \frac{13\pi}{8} + i \sin \frac{13\pi}{8} \right).$$

Геометрическая интерпретация корней n -й степени из комплексного числа

Выше было показано, что корень n -й степени из комплексного числа имеет n значений, имеющих один и тот же модуль и разные значения аргумента. Так как все числа z_k имеют одинаковые модули, то они соответствуют точкам комплексной плоскости, расположенным на окружности с радиусом $\sqrt[n]{\rho}$ и центром в начале координат (см. рис. 3). Аргументы чисел z_k равны $\alpha + \frac{2\pi k}{n}$, $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$, то есть

каждый последующий отличается от предыдущего на $\frac{2\pi}{n}$.

Следовательно, комплексные числа, являющиеся корнями степени n из комплексного числа ω , соответствуют точкам комплексной плоскости, расположенным в вершинах правильного n -угольника, вписанного в окружность радиуса $\sqrt[n]{\rho}$ с центром в начале координат.

Например: для числа $\omega = 16 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)$ корни четвертой степени имеют вид:

$$z_k = \sqrt[4]{16} \left[\cos \left(\frac{\pi}{2 \cdot 4} + \frac{2\pi k}{4} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{2 \cdot 4} + \frac{2\pi k}{4} \right) \right], \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

Точки z_0, z_1, z_2, z_3 расположены в вершинах квадрата, вписанного в окружность с радиусом, равным двум и центром в начале координат (рис. 7):

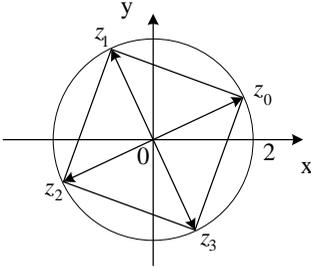


Рис. 7

$$z_0 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8} \right),$$

$$z_1 = 2 \left(\cos \frac{5\pi}{8} + i \sin \frac{5\pi}{8} \right),$$

$$z_2 = 2 \left(\cos \frac{9\pi}{8} + i \sin \frac{9\pi}{8} \right),$$

$$z_3 = 2 \left(\cos \frac{13\pi}{8} + i \sin \frac{13\pi}{8} \right).$$

◆ Вычисление рациональной степени комплексного числа имеет существенные отличия от нахождения рациональной степени действительного числа:

1) операция возведения комплексного числа в рациональную степень многозначна;

2) равенство $z^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{z^m} = \left(\sqrt[n]{z} \right)^m$ верно при условии, что m и n взаимно просты;

3) сокращение дроби в показателе степени приводит к изменению числа корней: $z^{\frac{mk}{nk}} \neq z^{\frac{m}{n}} \left(z \neq z^{\frac{m}{n}} \right)$;

4) возведение комплексного числа z в рациональную степень $\frac{p}{q}$ не рассматривается, если $\text{НОД}(n; p) \neq 1$.

8. Корни из единицы

Рассмотрим число $z = 1$. Будем считать его комплексным. В тригонометрической форме оно имеет вид: $z = \cos 0 + i \sin 0$.

Найдем корень n -й степени из z :

$$\sqrt[n]{z} = \varepsilon_k \Rightarrow$$

$$\varepsilon_k = \cos\left(0 + \frac{2\pi k}{n}\right) + i \sin\left(0 + \frac{2\pi k}{n}\right), \quad k = 0, 1, \dots, n-1;$$

$$\varepsilon_k = \cos \frac{2\pi k}{n} + i \sin \frac{2\pi k}{n}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Пример 19. Найти $\sqrt[3]{1}$.

Решение:

$$\varepsilon_k = \cos \frac{2\pi k}{3} + i \sin \frac{2\pi k}{3}, \quad k = 0, 1, 2;$$

$$\varepsilon_0 = \cos 0 + i \sin 0 = 1;$$

$$\varepsilon_1 = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i;$$

$$\varepsilon_2 = \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Теорема 1. Все значения корня n -й степени из комплексного числа z можно получить, умножив одно из значений этого корня на каждый из корней n -й степени из единицы.

Пример 20. Найти $\sqrt[3]{i}$.

Решение:

$$i = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2},$$

$$z_0 = \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i.$$

На основании теоремы 1:

$$\begin{aligned} z_1 &= z_0 \cdot \varepsilon_1 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) \cdot \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3}{4}i - \frac{1}{4}i - \frac{\sqrt{3}}{4} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, \end{aligned}$$

$$z_2 = z_0 \cdot \varepsilon_2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) \cdot \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) =$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{3}{4}i - \frac{1}{4}i + \frac{\sqrt{3}}{4} = -i.$$

9. Показательная форма комплексного числа

Для действительного числа x показательная функция разлагается в степенной ряд:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \dots$$

Аналогично для чисто мнимого показателя:

$$e^{yi} = 1 + \frac{yi}{1!} + \frac{(yi)^2}{2!} + \frac{(yi)^3}{3!} + \frac{(yi)^4}{4!} + \dots = 1 + \frac{y}{1!}i - \frac{y^2}{2!} - \frac{y^3}{3!}i + \frac{y^4}{4!} + \dots =$$

$$= \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + \dots \right) + \left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \frac{y^7}{7!} + \dots \right) i.$$

Так как в первой скобке имеем разложение в степенной ряд функции $\cos y$, а во второй – $\sin y$, то

$$e^{yi} = \cos y + i \sin y.$$

Заменяем y на $(-y)$:

$$e^{-yi} = \cos y - i \sin y.$$

Решая систему уравнений:

$$\begin{cases} e^{yi} = \cos y + i \sin y, \\ e^{-yi} = \cos y - i \sin y, \end{cases}$$

получим:

$$\cos y = \frac{e^{yi} + e^{-yi}}{2}, \quad \sin y = \frac{e^{yi} - e^{-yi}}{2i}.$$

Для комплексного числа $z = x + yi$ имеем:

$$\boxed{z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = r \cdot e^{i\varphi}.} \quad (11)$$

Поэтому

$$e^z = e^{x+yi} = e^x \cdot e^{yi} = e^x(\cos y + i \sin y),$$

где e^x – модуль; y – аргумент.

Функция e^z – периодическая с периодом $2\pi i$, так как $e^{z+2\pi ki} = e^z \cdot e^{2\pi ki} = e^z(\cos 2\pi k + i \sin 2\pi k) = e^z \cdot 1 = e^z$, $k \in Z$.

Пример 21. Вычислить $e^{-\frac{\pi}{2}i}$.

Решение:

$$e^{-\frac{\pi}{2}i} = \cos \frac{\pi}{2} - i \sin \frac{\pi}{2} = -i.$$

10. Решение квадратных уравнений

Решение квадратных уравнений с помощью дискриминанта

Пусть дано квадратное уравнение

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0.} \quad (12)$$

Дискриминант уравнения равен:

$$D = b^2 - 4ac.$$

Имеют место три случая:

1) $D > 0$, тогда уравнение имеет два различных действительных корня:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a};$$

2) $D = 0$, тогда уравнение имеет два равных действительных корня:

$$x_{1,2} = \frac{-b}{2a};$$

3) $D < 0$, тогда уравнение имеет два комплексных сопряженных корня:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{-D}}{2a} = \frac{-b \pm i\sqrt{D}}{2a}.$$

◆ Таким образом, квадратное уравнение всегда имеет два корня. Это утверждение можно распространить и на уравнения высших степеней: уравнение всегда имеет

столько корней, какова его степень. Например, уравнение пятой степени будет иметь пять корней.

Пример 22. Решить квадратные уравнения:

а) $x^2 - x - 2 = 0$;

б) $4x^2 + 12x + 9 = 0$;

в) $x^2 - 10x + 29 = 0$.

Решение:

а) $x^2 - x - 2 = 0$, $D = (-1)^2 - 4 \cdot (-2) = 1 + 8 = 9 > 0$, уравнение имеет два различных действительных корня:

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{9}}{2} = \frac{1 + 3}{2} = \frac{4}{2} = 2, \quad x_2 = \frac{1 - \sqrt{9}}{2} = \frac{1 - 3}{2} = \frac{-2}{2} = -1;$$

б) $4x^2 + 12x + 9 = 0$, $D = 12^2 - 4 \cdot 4 \cdot 9 = 144 - 144 = 0$, уравнение имеет два равных действительных корня:

$$x = \frac{-12 \pm 0}{2 \cdot 4} = \frac{-12}{8} = -\frac{3}{2};$$

в) $x^2 - 10x + 29 = 0$, $D = (-10)^2 - 4 \cdot 29 = 100 - 116 = -16 < 0$, уравнение имеет два комплексных сопряженных корня:

$$x_1 = \frac{10 + \sqrt{-16}}{2} = \frac{10 + 4i}{2} = 5 + 2i, \quad x_2 = \frac{10 - \sqrt{-16}}{2} = \frac{10 - 4i}{2} = 5 - 2i.$$

Теорема Виета

Определение 11. Квадратное уравнение (12) называется приведенным, если $a = 1$ и записывается:

$$x^2 + px + q = 0. \quad (13)$$

Теорема 2 (Виета). Сумма корней квадратного уравнения (13) равна $-p$, а их произведение равно q :

$$\boxed{\begin{cases} x_1 + x_2 = -p, \\ x_1 \cdot x_2 = q. \end{cases}} \quad (14)$$

Пример 23. Решить уравнение $x^2 - 4x + 20 = 0$ с помощью теоремы Виета (уравнение имеет комплексные корни).

Решение: по теореме Виета:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 4, \\ x_1 \cdot x_2 = 20. \end{cases}$$

Так как уравнение имеет комплексные корни, то пусть они имеют вид:

$$x_1 = a + bi \text{ и } x_2 = a - bi.$$

Тогда

$$\begin{cases} (a + bi) + (a - bi) = 4, \\ (a + bi) \cdot (a - bi) = 20. \end{cases}$$

Раскрыв скобки и приведя подобные слагаемые, получим:

$$\begin{cases} 2a = 4, \\ a^2 + b^2 = 20. \end{cases}$$

Из первого уравнения найдем $a = 2$. Подставляя найденное значение во второе уравнение, получим $b = \pm 4$.

Таким образом,

$$x_1 = 2 + 4i \text{ и } x_2 = 2 - 4i.$$

11. Решение кубических уравнений. Формула Кардано

Определение 12. Уравнение $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ называется **кубическим**.

Рассмотрим частный случай кубического уравнения, у которого коэффициент при третьей степени равен 1, а коэффициент при второй степени равен 0:

$$\boxed{x^3 + px + q = 0.} \quad (15)$$

Для решения уравнений вида (15) используется формула Кардано:

$$\boxed{x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}.} \quad (16)$$

Применяя формулу (16), нужно для каждого из трех значений корня

$$\alpha = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

брать то его значение

$$\beta = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}},$$

для которого выполняется условие

$$\alpha \cdot \beta = -\frac{p}{3}.$$

Пример 24. Решить кубическое уравнение:

$$x^3 - 6x - 4 = 0.$$

Решение:

$$\begin{aligned} x &= \sqrt[3]{2 + \sqrt{4 - 8}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{4 - 8}} = \\ &= \sqrt[3]{2 + \sqrt{-4}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-4}} = \sqrt[3]{2 + 2i} + \sqrt[3]{2 - 2i}. \end{aligned}$$

Найдем тригонометрические формы чисел $2 + 2i$ и $2 - 2i$:

$$2 + 2i = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right);$$

$$2 - 2i = 2\sqrt{2} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right).$$

Извлечем корни третьей степени из данных чисел:

$$\begin{aligned} \alpha &= \sqrt[3]{2 + 2i} = \sqrt[3]{2\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)} = \\ &= \sqrt{2} \left(\cos \left(\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3} \right) \right), \\ & \quad k = 0, 1, 2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta &= \sqrt[3]{2 - 2i} = \sqrt[3]{2\sqrt{2} \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right)} = \\ &= \sqrt{2} \left(\cos \left(\frac{7\pi}{12} + \frac{2\pi k_1}{3} \right) + i \sin \left(\frac{7\pi}{12} + \frac{2\pi k_1}{3} \right) \right), \\ & \quad k_1 = 0, 1, 2. \end{aligned}$$

Для $k = 0$, $k_1 = 2$ получим:

$$\begin{aligned}
x_1 &= \sqrt[3]{2+2i} + \sqrt[3]{2-2i} = \\
&= \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right) + \sqrt{2} \left(\cos \frac{23\pi}{12} + i \sin \frac{23\pi}{12} \right) = \\
&= \sqrt{2} \left[\left(\cos \frac{\pi}{12} + \cos \frac{23\pi}{12} \right) + i \left(\sin \frac{\pi}{12} + \sin \frac{23\pi}{12} \right) \right] = \\
&= \sqrt{2} \left(2 \cos \pi \cos \frac{11\pi}{12} + i \cdot 2 \sin \pi \cos \frac{11\pi}{12} \right) = \\
&= 2\sqrt{2} \left(-1 \cdot \cos \frac{11\pi}{12} + i \cdot 0 \right) = 2\sqrt{2}(-1) \left(-\sqrt{\frac{1 + \cos \frac{11\pi}{12}}{2}} \right) = \\
&= 2\sqrt{2} \sqrt{\frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = 2\sqrt{2} \sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{4}} = 2\sqrt{2 + \sqrt{3}} = \\
&= \sqrt{4 + 2\sqrt{3}} = \sqrt{1 + 2\sqrt{3} + 3} = \sqrt{(1 + \sqrt{3})^2} = 1 + \sqrt{3}.
\end{aligned}$$

Для $k=1$, $k_1=1$

$$\begin{aligned}
x_2 &= \sqrt[3]{2+2i} + \sqrt[3]{2-2i} = \sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) + \\
&+ \sqrt{2} \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -2.
\end{aligned}$$

Для $k=2$, $k_1=0$

$$\begin{aligned}
x_3 &= \sqrt[3]{2+2i} + \sqrt[3]{2-2i} = \\
&\sqrt{2} \left(\cos \frac{17\pi}{12} + i \sin \frac{17\pi}{12} \right) + \sqrt{2} \left(\cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12} \right) = \\
&\sqrt{2} \left[\left(\cos \frac{17\pi}{12} + \cos \frac{7\pi}{12} \right) + i \left(\sin \frac{17\pi}{12} + \sin \frac{7\pi}{12} \right) \right] = \\
&= \sqrt{2} \left(2 \cos \pi \cos \frac{5\pi}{12} + i \cdot 2 \sin \pi \cos \frac{5\pi}{12} \right) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2\sqrt{2} \left(-1 \cdot \cos \frac{5\pi}{2} + i \cdot 0 \right) = -2\sqrt{2} \sqrt{\frac{1 + \cos \frac{5\pi}{2}}{2}} = -2\sqrt{2} \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \\
&= -2\sqrt{2} \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{4}} = -2\sqrt{2 - \sqrt{3}} = -\sqrt{4 - 2\sqrt{3}} = -\sqrt{1 - 2\sqrt{3} + 3} = \\
&= -\sqrt{(1 - \sqrt{3})^2} = -\sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2} = 1 - \sqrt{3}.
\end{aligned}$$

Ответ: $-2, 1 \pm \sqrt{3}$.

Замечание. В примере (24) само уравнение имеет только действительные корни, однако при использовании формулы Кардано появляются комплексные числа, т.к. под знаком квадратного корня получились отрицательные числа.

Задачи и упражнения

1. Найти:

а) $\operatorname{Im} \bar{z}$, если $z = \frac{i}{1 - 2i}$;

б) $\operatorname{Re} \bar{z}$, если $z = \left(\frac{2 - i}{1 + i} \right)^3$;

в) $\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z$, если $z = \frac{2}{z_1}, z_1 = 1 + i$.

2. Выполнить действия:

а) $(2 + 3i)(3 - 2i)$;

б) $(5 + 2i) + (3 - 4i)$;

в) $(5 + 2i)(3 - 4i)$;

г) $(2 + i)(3 - i) + (2 + 3i)(3 + 4i)$;

д) $(2 + i)(3 + 7i) - (1 + 2i)(5 + 3i)$;

е) $(4 + i)(5 + 3i) - (3 + i)(3 - i)$;

ж) $(3 - 2i)^2$;

з) $(1 + i)^3$;

и) $\left(-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)^3$;

к) $(2 + i)^3 + (2 - i)^3$;

л) $(3 + i)^3 - (3 - i)^3$.

3. Вычислить:

а) $\frac{1 + i}{1 - i}$;

е) $\frac{(5 + i)(3 + 5i)}{2i}$;

б) $\frac{2i}{1+i}$;	ж) $\frac{(1+3i)(8-i)}{(2+i)^2}$;
в) $\frac{1+2i}{2+3i}$;	з) $\frac{(2+i)(4+i)}{1+i}$;
г) $\frac{4+3i}{5-2i}$;	и) $\frac{(3-i)(1-4i)}{2-i}$;
д) $\frac{(5+i)(7-6i)}{3+i}$;	к) $\frac{(1+i)^5}{(1-i)^3}$.

4. Найти значения выражений:

а) $\frac{z_1 z_2}{z_3}$, если $z_1 = 2+i$, $z_2 = 2-i$, $z_3 = 4-3i$;

б) $\frac{z_1}{z_2 z_3}$, если $z_1 = 1+i$, $z_2 = \sqrt{3}+i$, $z_3 = 1+\sqrt{3}i$.

5. Вычислить:

а) i^{77} ;	е) i^{-147} ;
б) i^{98} ;	ж) i^{8260} ;
в) i^{1234} ;	з) i^{-901} ;
г) i^{-57} ;	и) i^{-5023} ;
д) i^{333} ;	к) i^{-298} .

6. Найти тригонометрическую форму чисел:

а) 1;	з) $6i$;
б) -1 ;	и) $-\sqrt{3}i$;
в) $-i$;	к) $1+i$;
г) i ;	л) $1-i$;
д) -2 ;	м) $-1+i$;
е) 5;	н) $-1-i$;
ж) $-3i$;	о) $2-2i$.

7. Найти тригонометрическую форму чисел:

а) $1+\sqrt{3}i$;	г) $i+\sqrt{3}i$;
б) $1+\frac{\sqrt{3}}{3}i$;	д) $3+3i$;
в) $1+\sqrt{3}$;	е) $-3+\sqrt{3}i$.

8. Найти значения корней и дать им геометрическую интерпретацию:

а) $\sqrt[3]{-1}$;

б) $\sqrt[3]{1}$;

в) $\sqrt[3]{i}$;

г) $\sqrt[4]{-1}$;

д) $\sqrt[6]{1}$;

е) $\sqrt[4]{1}$;

ж) \sqrt{i} ;

з) $\sqrt[4]{-4}$;

и) $\sqrt[6]{64}$;

к) $\sqrt[6]{-27}$.

9. Найти значения корней:

а) $\sqrt{1+i}$;

б) $\sqrt{-3-\sqrt{3}i}$;

в) $\sqrt[3]{-1+i}$;

г) $\sqrt[3]{1+i}$;

д) $\sqrt[3]{2-2i}$.

10. Вычислить:

а) $(\cos 9^\circ + i \sin 9^\circ)^{10}$;

б) $(\cos 10^\circ + i \sin 10^\circ)^{27}$;

в) $(1+i)^{10}$;

г) $(1-\sqrt{3}i)^6$;

д) $(-1+i)^5$;

е) $(\sqrt{3}+i)^3$;

ж) $(1-i)^6$;

з) $(2+\sqrt{12}i)^5$;

и) $(1+\sqrt{3}i)^{150}$.

11. Вычислить выражения:

а) $\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^{12}$;

б) $\left(\frac{1-\sqrt{3}i}{1+i}\right)^{12}$;

в) $\left(\frac{\sqrt{3}+i}{1-i}\right)^{30}$;

г) $\frac{(-1+\sqrt{3}i)^{15}}{(1-i)^{20}} + \frac{(-1-\sqrt{3}i)^{15}}{(1+i)^{20}}$.

12. Решить уравнения:

а) $x^2 = -81$;

б) $x^2 = -3$;

в) $x^2 + 0,01 = 0$;

г) $9x^2 + 125 = 0$.

13. Найти корни квадратных уравнений:

а) $x^2 - 4x + 5 = 0$;

г) $4x^2 + 4x + 5 = 0$;

б) $x^2 + 4x + 13 = 0$;

д) $16x^2 - 32x + 17 = 0$;

в) $x^2 - 8x + 41 = 0$;

е) $x^2 - 6x + 11 = 0$.

14. Найти действительные x и y из уравнений:

а) $(2x + y) + (x - y)i = 18 + 3i$;

б) $(6x + y) + (2y - 7x)i = 12 + 5i$.

15. Решить уравнения, используя формулу Кардано:

а) $x^3 + 3x - 4 = 0$;

б) $x^3 + 12x = 0$;

в) $x^3 + 15x - 124 = 0$;

г) $x^3 + 5x - 84 = 0$.

ОТВЕТЫ

1. а) $-\frac{1}{5}$; б) $-\frac{13}{4}$; в) $\operatorname{Re} z = 1, \operatorname{Im} z = -1$.
2. а) $12+5i$; б) $8-2i$; в) $23-14i$; г) $1+18i$; д) $4i$;
е) $7+17i$; ж) $5-12i$; з) $-2+2i$; и) 1 ; к) 4 ; л) $52i$.
3. а) i ; б) $1+i$; в) $\frac{8}{13}-\frac{1}{13}i$; г) $\frac{14}{29}+\frac{23}{29}i$; д) $10-11i$;
е) $14-5i$; ж) $5+i$; з) $\frac{13}{2}-\frac{1}{2}i$; и) $\frac{11}{5}-\frac{27}{5}i$; к) 2 .
4. а) $\frac{4}{5}+\frac{3}{5}i$; б) $\frac{1}{4}-\frac{1}{4}i$.
5. а) i ; б) -1 ; в) -1 ; г) $-i$; д) i ;
е) i ; ж) 1 ; з) $-i$; и) i ; к) -1 .
6. а) $\cos 0+i\sin 0$; б) $\cos \pi+i\sin \pi$; в) $\cos \frac{3\pi}{2}+i\sin \frac{3\pi}{2}$;
г) $\cos \frac{\pi}{2}+i\sin \frac{\pi}{2}$; д) $2(\cos \pi+i\sin \pi)$; е) $5(\cos 0+i\sin 0)$;
ж) $3\left(\cos \frac{3\pi}{2}+i\sin \frac{3\pi}{2}\right)$; з) $6\left(\cos \frac{\pi}{2}+i\sin \frac{\pi}{2}\right)$;
и) $\sqrt{3}\left(\cos \frac{3\pi}{2}+i\sin \frac{3\pi}{2}\right)$; к) $\sqrt{2}\left(\cos \frac{\pi}{4}+i\sin \frac{\pi}{4}\right)$;
л) $\sqrt{2}\left(\cos \frac{7\pi}{4}+i\sin \frac{7\pi}{4}\right)$; м) $\sqrt{2}\left(\cos \frac{3\pi}{4}+i\sin \frac{3\pi}{4}\right)$;
н) $\sqrt{2}\left(\cos \frac{5\pi}{4}+i\sin \frac{5\pi}{4}\right)$; о) $2\sqrt{2}\left(\cos \frac{7\pi}{4}+i\sin \frac{7\pi}{4}\right)$.
7. а) $2\left(\cos \frac{\pi}{3}+i\sin \frac{\pi}{3}\right)$; б) $\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\cos \frac{\pi}{6}+i\sin \frac{\pi}{6}\right)$;
в) $(1+\sqrt{3})(\cos 0+i\sin 0)$; г) $(1+\sqrt{3})\left(\cos \frac{\pi}{2}+i\sin \frac{\pi}{2}\right)$;
д) $3\sqrt{2}\left(\cos \frac{\pi}{4}+i\sin \frac{\pi}{4}\right)$; е) $2\sqrt{3}\left(\cos \frac{5\pi}{6}+i\sin \frac{5\pi}{6}\right)$.
8. а) $-1, \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$; б) $1, -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$; в) $-i, \pm \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$;

- р) $\pm \frac{1}{\sqrt{2}} \pm \frac{1}{\sqrt{2}}i, \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \mp \frac{1}{\sqrt{2}}i$; д) $\pm 1, \pm \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i, \pm \frac{1}{2} \mp \frac{\sqrt{3}}{2}i$;
 е) $\pm 1, \pm i$; ж) $\pm \frac{1}{\sqrt{2}} \pm \frac{1}{\sqrt{2}}i$; з) $1 \pm i, -1 \pm i$;
 и) $\pm 2, \pm 1 \pm \sqrt{3}i, \pm 1 \mp \sqrt{3}i$; к) $\pm \sqrt{3}i, \pm \frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i, \pm \frac{3}{2} \mp \frac{\sqrt{3}}{2}i$.
9. а) $\sqrt[4]{2} \left[\cos\left(\frac{\pi}{8} + k\pi\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{8} + k\pi\right) \right], k = 0, 1$;
 б) $\sqrt[4]{12} \left[\cos\left(\frac{19\pi}{12} + k\pi\right) + i \sin\left(\frac{19\pi}{12} + k\pi\right) \right], k = 0, 1$;
 в) $\sqrt[6]{2}(\cos\varphi + i \sin\varphi), \varphi = 45^\circ, 165^\circ, 285^\circ$;
 г) $\sqrt[6]{2} \left[\cos\left(\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}\right) \right], k = 0, 1, 3$;
 д) $\sqrt[6]{2} \left[\cos\left(\frac{7\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{7\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}\right) \right], k = 0, 1, 3$.
10. а) i ; б) $-i$; в) $32i$; г) 64 ; д) $4(1-i)$; е) $8i$;
 ж) $8i$; з) $512(1-\sqrt{3}i)$; и) 2^{150} .
11. а) 1 ; б) -2^6 ; в) 2^{15} ; г) -64 .
12. а) $\pm 9i$; б) $\pm \sqrt{3}i$; в) $\pm 0,1i$; г) $\pm \frac{5\sqrt{5}}{3}i$.
13. а) $2 \pm i$; б) $-2 \pm 3i$; в) $4 \pm 5i$; г) $-\frac{1}{2} \pm i$;
 д) $1 \pm \frac{1}{4}i$; е) $3 \pm \sqrt{2}i$.
14. а) $x = 7, y = 4$; б) $x = 1, y = 6$.
15. а) $x_1 = 1, x_{2,3} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{15}i}{2}$;
 б) $x_1 = 0, x_{2,3} = \pm 2\sqrt{3}$;
 в) $x_1 = 4, x_{2,3} = -2 \pm 3\sqrt{3}$;
 г) $x_1 = 4, x_{2,3} = -2 \pm \sqrt{17}$.

Образец выполнения типового расчета

Дано комплексное число $z = \frac{\sqrt{2}}{-1+i}$. Требуется:

- найти алгебраическую форму z ;
- дать геометрическую и векторную интерпретации числа z ;
- вычислить $z^2 + \bar{z}$;
- найти тригонометрическую форму z ;
- вычислить z^5 ;
- вычислить $\sqrt[5]{z}$;
- дать геометрическую интерпретацию корней 5-й степени комплексного числа z ;
- найти показательную форму z .

Решение:

$$\text{а) } z = \frac{\sqrt{2}}{-1+i} = \frac{\sqrt{2}(-1-i)}{(-1+i)(-1-i)} = \frac{-\sqrt{2} - \sqrt{2}i}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

алгебраическая форма;

б) геометрически комплексному числу $z = \frac{\sqrt{2}}{-1+i}$ соответствует точка с координатами $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ или вектор

$$\mathbf{z} = \left\{ -\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2} \right\} \text{ (рис. 8);}$$

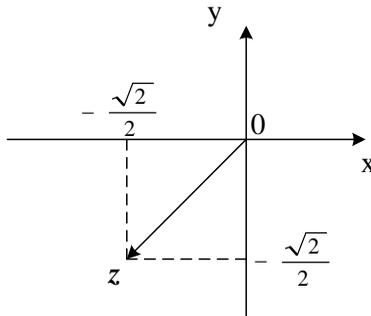


Рис. 8

$$\begin{aligned}
 \text{в) } z^2 + \bar{z} &= \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \\
 &= \frac{2}{4} + \frac{2}{4}i + \frac{2}{4}i - \frac{2}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i = \\
 &= i - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}+2}{2}i;
 \end{aligned}$$

$$\text{г) } r = \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = \sqrt{1} = 1;$$

$$\left. \begin{aligned}
 \cos \varphi &= \frac{a}{r} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\
 \sin \varphi &= \frac{b}{r} = -\frac{\sqrt{2}}{2}
 \end{aligned} \right\} \text{ - угол III четверти, } \varphi = \frac{5\pi}{4}.$$

Таким образом, тригонометрическая форма данного числа имеет вид:

$$z = \cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4};$$

$$\begin{aligned}
 \text{д) } z^5 &= 1^5 \left(\cos 5 \cdot \frac{5\pi}{4} + i \sin 5 \cdot \frac{5\pi}{4} \right) = \cos \frac{25\pi}{4} + i \sin \frac{25\pi}{4} = \\
 &= \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i;
 \end{aligned}$$

$$\text{е) } \omega_k = \sqrt[5]{z} = \sqrt[5]{1} \left[\cos \left(\frac{5\pi}{4 \cdot 5} + \frac{2\pi k}{5} \right) + i \sin \left(\frac{5\pi}{4 \cdot 5} + \frac{2\pi k}{5} \right) \right],$$

$$k = 0, 1, 2, 3, 4;$$

$$\omega_0 = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i;$$

$$\omega_1 = \cos \frac{13\pi}{20} + i \sin \frac{13\pi}{20};$$

$$\omega_2 = \cos \frac{21\pi}{20} + i \sin \frac{21\pi}{20};$$

$$\omega_3 = \cos \frac{29\pi}{20} + i \sin \frac{29\pi}{20};$$

$$\omega_4 = \cos \frac{37\pi}{20} + i \sin \frac{37\pi}{20};$$

ж) геометрически корни 5-й степени из данного числа представляют собой точки окружности, образующие правильный пятиугольник (рис. 9);

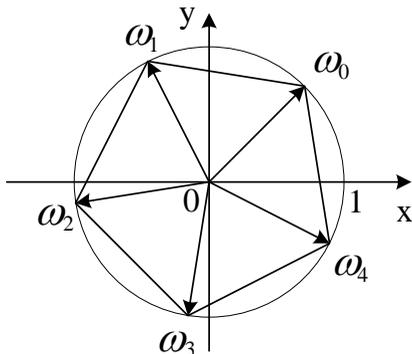


Рис. 9

з) показательная форма данного комплексного числа имеет вид:

$$z = \cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} = e^{\frac{5\pi i}{4}}.$$

Задания для выполнения типового расчета

Дано комплексное число z . Требуется:

- 1) найти алгебраическую форму числа z ;
- 2) дать геометрическую интерпретацию числа z ;
- 3) вычислить $z^2 + \bar{z}$;
- 4) найти тригонометрическую форму числа z ;
- 5) вычислить z^5 ;
- 6) вычислить $\sqrt[4]{z}$;
- 7) дать геометрическую интерпретацию корней 4-й степени комплексного числа z ;
- 8) найти показательную форму числа z .

Варианты для выполнения типового расчета

$$1. z = \frac{2}{-\sqrt{3}-i}. \quad 2. z = \frac{8}{1-\sqrt{3}i}. \quad 3. z = \frac{8}{3(-\sqrt{3}+i)}.$$

$$4. z = \frac{2\sqrt{2}}{-1+i}. \quad 5. z = \frac{4}{3(1+\sqrt{3}i)}. \quad 6. z = \frac{4}{\sqrt{3}-i}.$$

$$7. z = \frac{4}{3(\sqrt{3}-i)}. \quad 8. z = \frac{6\sqrt{2}}{1+i}. \quad 9. z = \frac{4}{3(-\sqrt{3}+i)}.$$

$$10. z = \frac{8}{3(-1+\sqrt{3}i)}. \quad 11. z = \frac{3\sqrt{2}}{1-i}. \quad 12. z = \frac{4}{3(-1-\sqrt{3}i)}.$$

$$13. z = \frac{2\sqrt{2}}{1+i}. \quad 14. z = \frac{2\sqrt{2}}{-1-i}. \quad 15. z = \frac{8}{\sqrt{3}+i}.$$

$$16. z = \frac{4}{-1-\sqrt{3}i}. \quad 17. z = \frac{8}{-1+\sqrt{3}i}. \quad 18. z = \frac{4}{-\sqrt{3}+i}.$$

$$19. z = \frac{8}{3(\sqrt{3}-i)}. \quad 20. z = \frac{4\sqrt{2}}{1+i}. \quad 21. z = \frac{4}{-\sqrt{3}-i}.$$

$$22. z = \frac{\sqrt{2}}{1-i}. \quad 23. z = \frac{2}{\sqrt{3}+i}. \quad 24. z = \frac{4}{1+\sqrt{3}i}.$$

$$25. z = \frac{4}{-1+\sqrt{3}i}. \quad 26. z = \frac{3\sqrt{2}}{-1+i}. \quad 27. z = \frac{8}{3(1-\sqrt{3}i)}.$$

$$28. z = \frac{4}{\sqrt{3}+i}. \quad 29. z = \frac{12}{-1-\sqrt{3}i}. \quad 30. z = \frac{6\sqrt{2}}{-1-i}.$$

ПРИЛОЖЕНИЕ

Основные формулы

Арифметические операции над комплексными числами (в алгебраической форме)

Пусть $z_1 = a + bi$ и $z_2 = c + di$.

1. Сложение: $z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i$.
2. Вычитание: $z_1 - z_2 = (a - c) + (b - d)i$.
3. Умножение: $z_1 \cdot z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$.
4. Деление: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{(ac + bd)}{c^2 + d^2} + \frac{(bc - ad)}{c^2 + d^2}i$.

Возведение мнимой единицы в степень

$$i^n = i^{4q+r} = \begin{cases} 1, & \text{если } r = 0, \\ i, & \text{если } r = 1, \\ -1, & \text{если } r = 2, \\ -i, & \text{если } r = 3. \end{cases}$$

Тригонометрическая форма комплексного числа

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Формулы перехода от алгебраической формы к тригонометрической

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \cos \varphi = \frac{a}{r}, \quad \sin \varphi = \frac{b}{r}.$$

Операции над комплексными числами (в тригонометрической форме)

Пусть

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi), \quad z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1), \quad z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2).$$

1. Умножение: $z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)]$.

2. Деление: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)]$.

3. Возведение в степень (формула Муавра):

$$z^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi).$$

4. Извлечение корня n -й степени:

$$z_k = \sqrt[n]{r} \left[\cos \left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n} \right) \right], \quad k \in \mathbb{Z}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Показательная форма комплексного числа

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = r \cdot e^{i\varphi}.$$

Библиографический список

1. Гусак, А.А. Высшая математика: учебник. В 2-х т. Т.1 / А.А. Гусак. – 5-е изд. – Минск: ТетраСистемс, 2004. – 544 с. – Текст: непосредственный.

2. Лунц, Г.Л. Функции комплексного переменного с элементами операционного исчисления: Математическая энциклопедия. В 5-ти т. Т. 2 / Г.Л. Лунц; гл. ред. И.М. Виноградов. – Москва: Сов. энциклопедия, 1979. – 1104 с. – Текст: непосредственный.

3. Пантелеев, А.В. Теория функций комплексного переменного и операционное исчисление в примерах и задачах: учеб. пособие / А.В. Пантелеев. – Москва: Высшая школа, 2001. – 445 с.– Текст: непосредственный.

4. Письменный, Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. Полный курс: курс лекций / Д.Т. Письменный. – 10-е изд., испр. – Москва: Айрис Пресс, 2011. – 608 с. – Текст: непосредственный.

5. Привалов, И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного: учебник / И.И. Привалов. – 15-е изд., стер. – Санкт-Петербург: Лань, 2009. – 432 с. – Текст: непосредственный.

6. Щипачев, В.С. Задачи по высшей математике: учеб. пособие / В.С. Щипачев. – Москва: Высшая школа, 1996. – 304 с. – Текст: непосредственный.

Оглавление

Введение.....	3
1. Определение комплексных чисел.....	6
2. Арифметические операции над комплексными числами.....	6
3. Возведение комплексного числа в степень.....	9
4. Алгебраическая форма комплексного числа.....	10
5. Геометрическая и векторная интерпретация комплексного числа.....	10
6. Тригонометрическая форма комплексного числа.....	11
7. Операции над комплексными числами, заданными в тригонометрической форме.....	14
8. Корни из единицы.....	19
9. Показательная форма комплексного числа.....	20
10. Решение квадратных уравнений.....	21
11. Решение кубических уравнений. Формула Кардано.....	23
Задачи и упражнения.....	26
Образец выполнения типового расчета.....	32
Задания для выполнения типового расчета.....	34
Варианты для выполнения типового расчета.....	35
Приложение.....	36
Библиографический список.....	37

Компьютерная верстка Т.В. Телелева

Темплан ФГБОУВО «ЗГУ» 2023 г., поз. 43. Подписано в печать 25.01.2023.
Формат 60x84 1/16. Бум. для копир.-мн.ап. Гарнитура *Bookman Old Style*.
Печать плоская. Усл.п.л. 2,5. Уч.-изд.л. 2,5. Тираж 30 экз. Заказ 11.

663310, Норильск, ул. 50 лет Октября, 7. E-mail: RIO@norvuz.ru

Отпечатано с готового оригинал-макета в отделе ЦИТ ФГБОУВО «ЗГУ»