Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Норильский государственный индустриальный институт»
Политехнический колледж

МАТЕМАТИКА

Методические указания
к самостоятельным работам

для студентов образовательных учреждений

среднего профессионального образования

по специальностям 2 курса:

23.02.03 Подземная разработка месторождений полезных ископаемых

21.02.17 Шахтное строительство

13.02.01 Тепловые электрические станции

13.02.11 Техническая эксплуатация и обслуживание электрического и электромеханического оборудования (по отраслям)

23.02.03 Техническое обслуживание и ремонт автомобильного транспорта

15.02.07 Автоматизация технологических процессов и производств (по отраслям)

2020

Методические указания учебной дисциплины «Математика» составлены в соответствии с рабочей программой по дисциплине "Математика" для специальностей среднего профессионального образования.

Организация-разработчик: Политехнический колледж ФГБОУ ВО «Норильский государственный индустриальный институт».

Разработчик:
Багомедова Уздият Магомедсаидовна, преподаватель первой квалификационной категории ФГБОУ ВО "НГИИ"

Рассмотрена на заседании предметной комиссии естественнонаучных дисциплин

Председатель комиссии М. В. Олейник

Утверждена методическим советом политехнического колледжа ФГБОУ ВО «Норильский государственный индустриальный институт».

Протокол заседания методического совета № --------- от «--------» ------- 20__г.

Зам. Директора по УР ----------------------- С. П. Блинова

УВАЖАЕМЫЙ СТУДЕНТ!

Методические указания по дисциплине «МАТЕМАТИКА» для выполнения самостоятельных работ созданы Вам в помощь для работы на занятиях, подготовки к ним. Приступая к выполнению самостоятельной работы, Вы должны внимательно прочитать цель и задачи занятия, ознакомиться с требованиями к уровню Вашей подготовки в соответствии с федеральными государственными образовательными стандартами третьего поколения, краткими теоретическими и учебно-методическими материалами по теме самостоятельной работы, ответить на вопросы для закрепления теоретического материала.

Внимание! Если в процессе подготовки к самостоятельным работам или при решении задач у Вас возникают вопросы, разрешить которые самостоятельно не удается, необходимо обратиться к преподавателю для получения разъяснений или указаний в дни проведения дополнительных занятий.

Время проведения дополнительных занятий можно узнать у преподавателя или посмотреть на двери его кабинета.

Желаем Вам успехов!!!

Требования к оформлению и выполнению самостоятельных работ.

Содержание работ полностью соответствует действующей программы по математике.

самостоятельные занятия рассчитаны: РПИ - 32ч, ШС - 32ч, ТЭ-26ч, ЭО -34ч, АМ - 32ч, АП - 24ч.

При проведении самостоятельных работ:

- использовать учебные пособия, наглядные средства обучения;
- проводить несложные дедуктивные рассуждения;
- обосновывать шаги решения задач;
- формулировать определения математических понятий;
- пользоваться математической терминологией и символикой;
- письменно оформлять решения задач
- пользоваться калькулятором;
- самостоятельно изучать учебный материал.

СОДЕРЖАНИЕ

№ занятия	Темы самостоятельных работ	часы					
		РПИ	ШС	ТЭ	ЭО	АМ	АП
1	Решение прикладных задач	8	8	4	8	8	3
2	Действия над комплексными числами	2	2	2	3	2	2
3	Решение дифференциальных уравнений	4	4	2	4	4	2
4	Решение дифференциальных уравнений	2	2	2	3	2	2
5	Числовые ряды. Решение задач	2	2	2	2	2	2
6	Построение графов	2	2	2	2	2	2
7	Формулы сложения и умножения вероятностей. Решение задач	2	2	2	2	2	2
8	Конспект на тему: "Случайная величина. Дискретная и случайная величины. Закон распределения случайной величины"	2	2	2	2	2	1
9	Математическое ожидание, дисперсия дискретной случайной величины. Решение задач	2	2	2	2	2	2
10	Вычисление интегралов по формулам прямоугольников, трапеций	2	2	2	2	2	2
11	Нахождение производных функции в точке x по заданной таблично функции $y = f(x)$ методом численного дифференцирования	2	2	2	2	2	2
12	Построение интегральной кривой. Метод Эйлера. Нахождение значений функции с использованием метода Эйлера	2	2	2	2	2	2
	Всего:	32	32	26	34	32	24

Самостоятельная работа №1

«Решение прикладных задач».

Цель работы:

уметь:

- вычислять определенные интегралы методами: замены переменной, по частям;

- решать прикладные задачи с помощью определенного интеграла.

Необходимые для выполнения работы знания:

Студент должен:

знать:

- таблицу значений интегралов;

- правила вычисления определенных интегралов.

Сведения из теории:

Понятие определенного интеграла применяется при решении задач на вычисление работы переменной силы, давления жидкости на вертикальную поверхность, пути, пройденного телом, имеющим переменную скорость, и ряд других.

Схема решения задач:

1) Искомая величина (путь, работа, давление т. д.) соответствует некоторому промежутку изменения переменной величины, которая является переменной интегрирования. Эту переменную величину обозначают через x, а промежуток ее изменения -- через $[a;\ b]$.
2) Отрезок $[a;\ b]$ разбивают на n равных частей, в каждой из которых можно пренебречь изменением переменной величины.
3) Далее составляют интегральную сумму, выражающую приближенное значение искомой величины. Переходя к пределу при $n \to \infty$, находят искомую величину I в виде интеграла

$$I = \int_a^b f(x)dx,\ где\ f(x) -$$

данная по условиям задачи функция (сила, скорость и т. д.).

1. Нахождение пути, пройденного телом при прямолинейном движении.

Как известно, путь, пройденный телом при равномерном движении за время t, вычисляется по формуле $s = v \cdot t$.

Если тело движется неравномерно в одном направлении и скорость его меняется в зависимости от времени $t, т.е. v = f(t)$, то для нахождения пути, пройденного телом за время от t_1 до t_2, разделим этот промежуток времени на n равных частей Δt. В каждой из таких частей скорость можно считать постоянной и равной значению скорости в конце этого промежутка. Тогда пройденный телом путь будет приближенно равен сумме $\sum_{\kappa=1}^{n} v(t)\,\Delta t$, т. е.

$$s \approx \sum_{\kappa=1}^{n} v(t)\,\Delta t$$

Итак,

$$s = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt. \qquad (1)$$

Пример 1.

Скорость движения материальной точки задается формулой $v = (4t^3 - 2t + 1) м/с$. Найти путь, пройденный точкой за первые 4с от начала движения.

Решение.

Согласно формуле (1), имеем

$$s = \int_0^4 (4\,t^3 - 2t + 1)dt = (t^4 - t^2 + t)\Big|_0^4 = 256 - 16 + 4 = 244\ (м).$$

Ответ: 244 м.

2. Вычисление работы силы, произведенной при прямолинейном движении тела.

Пусть тело под действием силы F движется по прямой s, а направление силы совпадает с направлением движения. Необходимо найти работу, произведенную силой F при перемещении тела из положения a *в положение* b.

Если сила F постоянна, то работа находится по формуле $A = F(b-a)$ (произведение силы на длину пути). $F = f(x)$. Для того чтобы найти работу, совершаемую силой F на отрезке пути от a *до* b, разделим этот отрезок на n равных частей Δx.

$$A \approx \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x.$$

Итак, работа переменной силы вычисляется по формуле A= $\int_a^b f(x)dx \quad (2)$

3. Вычисление работы, затраченной на растяжение или сжатие пружины.

Согласно закону Гука, сила F, необходимая для растяжения или сжатия пружины, пропорциональна величине растяжения или сжатия.

Пусть $x -$ величина растяжения или сжатия пружины. Тогда $F = kx$, где $k -$ *коэффициент* пропорциональности, зависящий от свойства пружины.

Истинную величину работы вычисляется по формуле

$$A = k\int_{x_0}^{x_1} xdx \qquad (3)$$

Пример 2.

Какую работу совершает сила в 10 Н при растяжении пружины на 2 см?

Решение:

По закону Гука сила F, растягивающая пружину, пропорциональна растяжению пружины, т. е. $F = kx$. Используя условие, находим $k = \frac{10}{0,02} = 500(Н/м)$, т. е. $F = 500x$. Согласно формуле, получим

$$A = \int_0^{0,02} 500xdx = \frac{500x^2}{2}\Bigg|_0^{0,02} = \frac{500\cdot(0,02)^2}{2} - 0 = 0,1(Дж).$$

Ответ: $A = 0,1(Дж)$.

4. Определение силы давления жидкости на вертикально расположенную пластинку.

Из физики известно, что сила P давления жидкости на горизонтально расположенную площадку S, погружения которой равна h, определяется по формуле

$P = 9{,}81\gamma hS$, где γ —плотность жидкости, S - площадь пластинки, h - глубина ее погружения.

Выведем формулу для вычисления силы давления жидкости на вертикально расположенную пластинку произвольной формы, если ее верхний край погружен на глубину a, а нижний - на глубину b.

$$\boldsymbol{P = 9{,}81\gamma \int_a^b xydx} \qquad (4)$$

Если верхний край пластинки совпадает с поверхностью жидкости, то $a = 0$ и формула примет вид

$$\boldsymbol{P = 9{,}81\gamma \int_0^b xydx} \qquad (5)$$

Для пластинки постоянной ширины формула упрощается, т. к. эту постоянную можно вынести за знак интеграла:

$$\boldsymbol{P = 9{,}81\gamma \int_a^b xydx = 9{,}81\gamma y \int_a^b xdx} \qquad (6)$$

Пример 3.

Определить силу давления воды на стенку шлюза, длина которого 20м, а высота 5м (считая шлюз доверху заполненной водой).

Решение:

Здесь $y = f(x) = 20, a = 0, b = 5(м), \gamma = 1000кг/м^3$

$$P = 9810\int_0^5 20xdx = 9810 \cdot 20\frac{x^2}{2}\Big|_0^5 = 9810 \cdot 10 \cdot 25 - 0 = 2{,}45 \cdot 10^6 (H)$$

Ответ: $2{,}45 \cdot 10^6$ (Н).

Задания для самостоятельного решения:

1) Тело движется прямолинейно со скоростью $v(t) = (2 + 5t^2)$ м/с. Найти путь, пройденный телом за первые 5 с.

2) Тело движется прямолинейно со скоростью $v(t) = (t + 6t^2)$ м/с. Найти путь, пройденный телом за 2 - ю секунду

3) Какую работу совершает сила в 8 Н при растяжении пружины на 6см?

4) Сила в 40 Н растягивает пружину на 0,04 м. Какую работу надо совершить, чтобы растянуть пружину на 0,02 м?

5)Вычислить силу давления на прямоугольную пластинку с основанием 16 см и высотой 24 см, погруженную вертикально в воду так, что верхнее основание пластинки находится на 10 см ниже свободной поверхности воды.

6) Вычислить силу давления воды на вертикальную прямоугольную пластинку, основание которой 30 м, а высота 10 м, причем верхний конец пластинки совпадает с уровнем воды.

Контрольные вопросы:

1) Формулы интегрирования.
2) Приведите примеры приложения определенного интеграла.

Литература: **[с. 318 - 319]**

Самостоятельная работа №2.

«Действия над комплексными числами».

Цель работы:

уметь:

- выполнять действия над комплексными числами, представленными в различных формах.

Необходимые для выполнения работы знания:

студент должен:

знать:

- алгебраическую форму комплексного числа;
- тригонометрическую форму комплексного числа

Сведения из теории:

Определение:

Числа вида $a + bi$, где a и $b -$ действительные числа, а число i, определяемое равенством $i^2 = -1$ есть мнимая единица, будем называть комплексными.

Запись комплексного числа в виде $a + bi$ называется алгебраической формой комплексного числа.

$a + bi$ и $c + di$ равны, если $a = c$ и $b = d$.

Действия над комплексными числами, заданные в алгебраической форме.

Сложение, вычитание, умножение комплексных чисел в алгебраической форме производят по правилам соответствующих действий над многочленами.

Пример 4.

Даны комплексные числа $z_1 = 2 + 3i,\ z_2 = 5 - 7i$. Найти:

а) $z_1 + z_2$.

Решение:

$$z_1 + z_2 = (2 + 3i) + (5 - 7i) = 2 + 3i + 5 - 7i = (2 + 5) + (3i - 7i) = 7 - 4i.$$

б) $z_1 - z_2$;

Решение:

$$z_1 - z_2 = (2 + 3i) - (5 - 7i) = 2 + 3i - 5 + 7i = (2 - 5) + (3i + 7i) = -3 + 10i.$$

в) $z_1 z_2$;

Решение:

) $z_1 z_2 = (2 + 3i)(5 - 7i) = 10 - 14i + 15i - 21i^2 = (10 + 21) + (-14i + 15i) = 31 + i$, (здесь учтено, что $i^2 = -1$).

Два комплексных числа называются сопряженными, если они отличаются друг от друга только знаками перед мнимой частью.

Произведение двух сопряженных чисел всегда равно действительному числу. Воспользуемся этим свойством для выполнения деления двух комплексных чисел. Чтобы выполнить деление, произведем дополнительное действие: умножим делимое и делитель на комплексное число, сопряженное делителю.

Пример 5.

Выполнить деление:

$$\frac{3+5i}{2+6i}$$

$$\frac{3+5i}{2+6i} = \frac{(3+5i)(2-6i)}{(2+6i)(2-6i)}$$

Произведем умножение для делимого и делителя в отдельности:

$$\frac{3+5i}{2+6i} = \frac{(3+5i)(2-6i)}{(2+6i)(2-6i)} = \frac{6-18i+10i-30i^2}{4-36i^2} = \frac{(6+30)+(-18i+10i)}{4+36} = \frac{36-8i}{40} = \frac{36}{40} - \frac{8i}{40} = \frac{9}{10} - \frac{1}{5}i$$

Действия над комплексными числами в тригонометрической форме.

$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ – тригонометрическая форма комплексного числа.

Правило перехода от алгебраической формы комплексного числа к тригонометрической.

1) Находят модуль комплексного числа r, для чего используют формулу $r = \sqrt{a^2+b^2}$.
2) Для нахождения φ сначала определяют геометрически, в какой четверти находится точка z.
3) Составляют уравнения $\cos\varphi = \frac{a}{r}$ и $\sin\varphi = \frac{b}{r}$ и по решению одного из них находят угол φ.
4) Записывают комплексное число z в тригонометрической форме.
   При умножении двух комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме, их модули перемножаются, а аргументы складываются:
   $$z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2))$$

При делении комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме, их модули делятся, а аргументы вычитаются:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)$$

При возведении в степень комплексного числа, заданного в тригонометрической форме, модуль числа нужно возвести в n −ю степень, а аргумент на число n .

$$\boldsymbol{z^n = r^n(\cos\varphi n + i\sin\varphi n)}$$

$\boldsymbol{z = re^{i\varphi}}$ − *показательная форма комплексного числа.*

$$\cos\varphi + i\sin\varphi = e^{i\varphi} -$$

называется формулой Эйлера.

Пример 6.

Записать число $z = 3\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ в показательной форме.

Решение:

Здесь $r = 3,\ \varphi = \frac{\pi}{4}$. Следовательно, показательная форма комплексного числа имеет вид $z = 3e^{\frac{\pi i}{4}}$.

Задания для самостоятельного решения:

1) Выполнить действия над комплексными числами в алгебраической форме:

а) $(3 + 5i) + (7 - 2i)$

б) $(3 - 2i) - (5 + i)$

в) $(6 + 2i) + (5 + 3i)$

г) $(4 + 2i) - (-3 + 2i)$

д) $(2 + 2 + i)(5 - 7i)$

е) $(-2 + 3i)(3 + 5i)$

ж) $\frac{3+2i}{1-5i}$

з) $\frac{3-7i}{3+2i}$

2) Выполнить действия над комплексными числами в тригонометрической форме.

Найти произведение комплексных чисел z_1 и z_2:

а) $z_1 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$; $z_2 = 0{,}4\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$

б) $z_1 = (\cos 45° + i\sin 45°)$; $z_2 = 3(\cos 180° + i\sin 180°)$

в) $z_1 = 2{,}4(\cos\pi + i\sin\pi)$; $z_2 = 0{,}5(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4})$

Найти частное комплексных чисел z_1 и z_2:

а) $z_1 = 0{,}6(\cos 120° + i\sin 120°)$; $z_2 = 3(\cos 240° + i\sin 240°)$

б) $z_1 = 4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$; $z_2 = 8\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

в) $z_1 = 3(\cos 225° + i\sin 225°)$; $z_2 = 5(\cos 45° + i\sin 45°)$

Найти z^4; если $z = 2(\cos 60° + i\sin 60°)$

z^5; если $z = 3\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$

Контрольные вопросы:

1) Какие числа называются комплексными мнимыми?
2) Что называется модулем комплексного числа?
3) Как выполняется сложение и вычитание комплексных чисел?
4) Как выполняется умножение комплексных чисел?
5) Как выполняется деление комплексных чисел?
6) Как выполняется возведение в степень мнимых и комплексных чисел?

Литература:**[1, с.17 -24]**

Самостоятельная работа №3.

«Решение дифференциальных уравнений».

Цель работы:

уметь:

-решать дифференциальные уравнения с разделяющими переменными; однородные дифференциальные уравнения первого порядка;

-решать прикладные задачи.

Необходимые для выполнения работы знания:

студент должен:

знать:

- определение производной;

- правила вычисления производной высших порядков.

Сведения из теории:

Дифференциальным уравнением называется уравнение, содержащее производную неизвестной функции или ее дифференциал. Дифференциальное уравнение может содержать первую производную, вторую производную и производные высших порядков или дифференциалы. Символически дифференциальное уравнение записывается так:

$$F(x; y; y') = 0;$$
$$F(x; y; y'') = 0;$$
$$F\left(x; y; y'; y''; \ldots; y^n\right) = 0.$$

Порядком дифференциального уравнения называется порядок высшей производной или дифференциала, входящих в уравнение. Степенью дифференциального уравнения (алгебраического относительно производных или дифференциалов) называется степень высшей в нем производной или дифференциала. Решением дифференциального уравнения называется такая функция, подстановка которой в это уравнение обращает его в тождество. Решение дифференциального уравнения называют интегралом дифференциального уравнения. Частным решением дифференциального уравнения называется решение, полученное из общего при различных числовых значениях произвольных постоянных. График частного решения дифференциального уравнения называется интегральной кривой.

Пример 7.

Найти общее решение дифференциального уравнения $3x\,dx - dy + dx = 0$.

Решение:

Данное уравнение приведем к виду $\varphi(y)dy = f(x)dx.$ Такие уравнения называются дифференциальными уравнениями с разделенными переменными. Сгруппируем члены с dx: $(3x+1)dx - dy = 0.$ Полученные дифференциалы функций запишем в разных частях равенства:

$dy = (3x+1)dx.$ Получили уравнение, в котором переменные разделены. Интегрируя, получим

$$\int dy = \int (3x+1)dx; \quad y = \frac{3}{2}x^2 + x + C.$$

Пример 8.

Найти частное решение дифференциального уравнения $\frac{3y^2}{x^2}dy - dx = 0,$ если при x = 3, y = 1.

Решение:

Разделим переменные:

$$3y^2dy - x^2dx = 0; \quad 3y^2dy = x^2dx.$$

Интегрируя, получим

$$\int 3y^2dy = \int x^2dx; \quad y^3 = \frac{1}{3}x^3 + C.$$

Подставим в уравнение $y^3 = \frac{1}{3}x^3 + C$ значения x = 3, y = 1.

$$1 = \frac{1}{3}3^3 + C, \text{ откуда } C = -8.$$

Ответ: $y^3 = \frac{1}{3}x^3 - 8; \quad y = \sqrt[3]{\frac{1}{3}x^3 - 8}.$

Пример 9.

Найти общий интеграл дифференциального уравнения

$1 + y - xy' = 0.$

Решение:

$$1 + y - x\frac{dy}{dx} = 0; \quad (1+y)dx - xdy = 0; \quad \frac{dy}{1+y} = \frac{dx}{x};$$

$$\int \frac{dy}{1+y} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow ln(1+y) = ln\, x + lxC;$$

$$1 + y = Cx; \quad y = Cx - 1.$$

Ответ. $y = Cx - 1.$

Пример 10.

Решить однородное дифференциальное уравнение $(x + y)dx - xdy = 0.$ Дифференциальное уравнение называется однородным, если оно может быть приведено к виду $y' = f\left({}^{y}\!/_{x} \right).$

Решение.

Уравнение

$$(x + y)dx - xdy = 0 \qquad (*)$$

однородное первой степени относительно x и y. Положим $y = zx,$ где z – новая функция от x. Найдем дифференциал произведения: $dy = y'_x dx; \quad (zx)' = x'z + z'x = z + \frac{dz}{dy} x \,(x' = 1);$

$$dy = \left(z + x\frac{dz}{dx} \right)dx = zdx + xdz;$$

$$dy = zdx + xdz.$$

Заменим в уравнении (*) y и dy на их значения:

$$(x + zx)dx - x(zdx + xdz) = 0;$$

$$xdx + zxdx - zxdx - x^2 dz = 0; \quad xdx - x^2 dz = 0;$$

$$dx - xdz = 0, \quad dz = \frac{dx}{x}.$$

Выполним интегрирование:

$$\int dz = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow z = ln\, x + ln\, C, \quad z = ln(Cx).$$

Подставим выражение $z = ln(Cx)$ в подстановку $y = zx:$

$$y = x\, ln(Cx).$$

Получили общее решение дифференциального уравнения.

Пример 11.

Решить однородное дифференциальное уравнение
$x\cos\frac{y}{x}dy + \left(x - y\cos\frac{y}{x}\right)dx = 0.$

Решение.

Сделаем подстановку $y = zx.$ Найдем дифференциал функции: $dy = zdx + xdz.$ Подставим в данное уравнение значения y и dy:

$$x\cos z(zdx + xdz) + (x - zx\cos z)dx = 0.$$

$$x(z\cos zdx + xdz + dx - z\cos zdx) = 0.$$

Произведем упрощения:

$$x\cos zdx + dx = 0.$$

Разделим переменные:

$$\cos zdz = -\frac{dx}{x}.$$

Интегрируя, получим

$$\sin z = -\ln x + \ln C; \quad \ln e^{\sin z} + \ln x = \ln C; \quad xe^{\sin z} = C;$$

$$xe^{\sin y/x} = C.$$

Линейные дифференциальные уравнения. Дифференциальное уравнение, содержащее неизвестную функцию и ее производную только в первой степени, называется линейным. Такие уравнения имеют вид

$$y' + yf(x) = F(x), \text{ или } \frac{dy}{dx} + yf(x) = F(x)$$

Если F(x) = 0, то уравнение $y' + yf(x) = 0$ называется линейным уравнением без правой части. Для решения линейных уравнений пользуются подстановкой $y = uz$, где u и z – некоторые функции от x.

Пример 12.

Решить линейное дифференциальное уравнение $y'\cos x + y\sin x = 1.$

Решение:

Разделим каждый член уравнение на cos x:

$$y' + y\,tg\,x = \frac{1}{\cos x}; \quad \frac{dy}{dx} + y\,tg\,x = \frac{1}{\cos x}.$$

Положим $y = uz$. Выполним дифференцирование:

$$y' = \frac{dy}{dx} = u'z + uz'.$$

Подставляя значения y и y′ в уравнение, получим

$$u'z + uz' + uz\,tg\,x = \frac{1}{\cos x} \Rightarrow u'z + u(z' + z\,tg\,x) = \frac{1}{\cos x}. \qquad (*)$$

Подберем z так, чтобы $z' + z\,tg\,x = 0.$ Откуда $\dfrac{dz}{dx} + z\,tg\,x = 0.$ Разделим переменные и выполним интегрирование:

$$\frac{dz}{z} = -tg\,x dx; \quad \frac{dz}{z} = -\frac{\sin x}{\cos x}dx; \quad \int\frac{dz}{z} = -\int\frac{\sin x}{\cos x}dx;$$

$$\ln z = \ln\cos x_1 \Rightarrow z = \cos x.$$

Теперь уравнение (*) примет вид

$$u'\cos x = \frac{1}{\cos x}; \quad \frac{du}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}; \quad du = \frac{dx}{\cos^2 x}.$$

Интегрируем:

$$u = tg\,x + C.$$

Подставляя значения u и z в равенство $y = uz$, получим

$$y = (tg\,x + C)\cos x, \quad \text{или } y = \sin x + C\cos x.$$

Задания для самостоятельного решения:

1. Найти частное решение дифференциального уравнения $xdy = ydx,$ если при *x = 2* и *y = 6*.
2. Найти общее решение дифференциального уравнения $\left(x^2 - yx^2\right)dy + \left(y^2 + xy^2\right)dx = 0.$
3. Найти общее решение однородного дифференциального уравнения $(x + y)dx - xdy = 0.$
4. Найти частное решение линейного дифференциального уравнения $\cos xdy + y\sin xdx = dx,$ если при *x = 0* и *y = 1*.

5. Найти частное решение уравнения $y'' - y' - 2y = 0$, если при $y'' = 0, y = 9/5, y' = 0.$

6. Найти общее решение линейного дифференциального уравнения $\frac{dy}{dx} + \frac{2y}{x} = \frac{1}{x^2}$.

7. Найти общий интеграл однородного дифференциального уравнения $\frac{dy}{dx} = \frac{xy + y^2}{x^2}$.

8. Найти частное решение дифференциального уравнения $(x-1)dy = (y+1)dx,$ если при $x = 2y = 3.$

9. Найти общее решение дифференциального уравнения $\left(1 + y^2\right)dx - \sqrt{x}dy = 0.$

10. Найти общее решение однородного дифференциального уравнения $(x+y)dx + (y-x)dy = 0.$

11. Найти частное решение дифференциального уравнения $(1+y)dx - (1-x)dy = 0,$ если при $x = -2$ и $y = 3$.

12. Найти общее решение дифференциального уравнения $x^2 dy - (2xy + 3y)dx = 0.$

13. Найти общее решение линейного дифференциального уравнения $y' - y - 1 = 0.$

14. Найти частное решение однородного дифференциального уравнения $xy^2 dy = \left(x^3 + y^3\right)dx,$ если при $x = 1$ и $y = 3$.

15. Найти общее решение дифференциального уравнения $y^2 dy + (x-2)dy = 0.$

16. Найти частное решение дифференциального уравнения $(x+1)ydx + (1-y)xdy = 0,$ если при $x = 1$ и $y = 1$.

17. Найти общий интеграл уравнения $y' + y\,tg\,x = 0.$

18. Найти частное решение уравнения $y'' - 6y = 0,$ если при $x = 0,$ $y = 4,$ $y' = 9.$

Контрольные вопросы:

1) Что называется частной производной первого порядка?
2) План вычисления частной производной второго порядка.

Литература:**[2, с.242 - 245]**

Самостоятельная работа №4

«Решение дифференциальных уравнений».

Цель работы:

уметь:

- решать дифференциальные уравнения;

-интегрировать части дифференциального уравнения

Необходимые для выполнения работы знания:

студент должен:

знать:

- таблицу интеграла;

- способы решения дифференциальных уравнений

Сведения из теории:

Уравнения вида $y'' + py' + qy = 0$, где p *и* $q -$ постоянные величины, называются линейными однородными дифференциальными уравнениями второго порядка с постоянными коэффициентами.

Для отыскания общего решения уравнения составляется характеристическое уравнение

$$r^2 + pr + q = 0,$$

которое получается из уравнения $y'' + py' + qy = 0$ заменой y'', y' *и* y на соответствующие степени r, причем сама функция y заменяется единицей.

Тогда общее решение дифференциального уравнения $y'' + py' + qy = 0$ строится в зависимости от корней r_1 *и* r_2 характеристического уравнения $r^2 + pr + q = 0$. Здесь возможны три случая.

1 случай. Корни r_1 *и* r_2 $-$действительные и различные. В этом случае общее решение уравнения $y'' + py' + qy = 0$ имеет вид

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}.$$

2 случай. Корни r_1 *и* r_2 $-$ действительные и равные: r_1 *и* $r_2 = r$. Тогда общее решение уравнения $y'' + py' + qy = 0$ имеет вид

$$y = (C_1 + C_2 x)e^{rx}$$

3 случай. Корни r_1 *и* r_2 $-$комплексно-сопряженные: $r_1 = \alpha + \beta i$;

$r_2 = \alpha - \beta i$. В этом случае общее решение уравнения $y'' + py' + qy = 0$ записывается так:

$$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + \sin\beta x)$$

Пример 13.

Решить уравнение $y'' + 7y' + 10y = 0.$

Решение:

Составим характеристическое уравнение и найдем его корни:

$k^2 - 7k + 10 = 0; \quad k_1 = 2, k_2 = 5.$

Найдем частные решения уравнения:

$y_1 = e^{2x}, \quad y_2 = e^{5x}.$

Составим общее решение уравнения:

$y = C_1 y_1 + C_2 y_2; \quad y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{5x}.$

Пример 14.

Решить уравнение $\frac{d^2 y}{dx^2} - 10\frac{dy}{dx} + 25y = 0.$

Решение:

Составим характеристическое уравнение и найдем его корни:

$k^2 - 10k + 25 = 0; \quad k_1 = 5, k_2 = 5.$

Найдем два частных решения уравнения:

$y_1 = e^{5x}, \quad y_2 = xe^{5x}.$

Составим общее решение уравнения:

$y = C_1 e^{5x} + C_2 xe^{5x}.$

Пример 15.

Решить уравнение $y'' - 6y' + 25y = 0.$

Решение:

Составим характеристическое уравнение и найдем его корни:

$$k^2 - 6k + 25 = 0; \quad k_1 = 5 + 4i, k_2 = 3 - 4i.$$

Корни – комплексные числа. Частные решения находим по формулам $y_1 = e^{ax}\cos bx$ и $y_2 = e^{ax}\sin bx$. В нашем случае $a = 3, b = 4.$ Общее решение имеет вид

$$y = C_1 e^{3x}\cos 4x + C_2 e^{3x}\sin 4x = e^{3x}\left(C_1\cos 4x + C_2\sin 4x\right).$$

Разберем решения дифференциальных уравнений вида

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(x); \quad \frac{d^2y}{dx^2} = f\left(\frac{dy}{dx}\right).$$

Пример 16. Решить уравнение $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 4.$

Решение:

$$f(x) = 4; \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = 4 \Rightarrow d\left(\frac{dy}{dx}\right) = 4dx;$$

Пример 17.

Найти частное решение уравнения $y'''' + 8y'' + 16y = 0$, если $y = 1$ и $y = 1$ при $x = 0$.

Решение:

Составим характеристическое уравнение и найдем его корни:

$$r^2 + 8r + 16 = 0$$

$r_1 = r_2 = -4$, то общее решение данного дифференциального уравнения записывается в виде

$$y = (C_1 + C_2x)e^{-4x} = C_1e^{-4x} + C_2xe^{-4x}.$$

Дифференцируя общее решение, имеем

$$y' = -4C_1e^{-4x} + C_2e^{-4x} - 4C_2xe^{-4x}.$$

Подставив начальные данные в выражения для y и y', получим систему уравнений:

$$\begin{cases} 1 = C_1 e^0 + C_2 \cdot 0 \cdot e^0, \\ 1 = -4C_1 e^0 + C_2 e^0 - 4C_2 \cdot 0 \cdot e^0, \end{cases} \text{или} \begin{cases} 1 = C_1 \\ 1 = -4C_1 + C_2 \end{cases}.$$

откуда $C_1 = 1$ и $C_2 = 5$. Следовательно искомое частное решение имеет вид $y = e^{-4x} + 5xe^{-4x}$.

Задания для самостоятельного решения

1) Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - 8y' + 16y = 0$.

2) Решить уравнение $\frac{d^2y}{dx^2} - 10\frac{dy}{dx} + 25y = 0$.

3) Решить уравнение $y'' - 6y' + 7y = 0$.

4) Решить уравнение $y'' + 5y' + 6 = 0$.

5) Решить уравнение $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 6y = 0$.

6) Решить уравнение $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 6y = 0$.

7) Решить уравнение $\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 13 = 0$; $y = 2$, $y' = 1$ при $x = 0$.

8) Решить уравнение $\frac{d^2y}{dx^2} - 6\frac{dy}{dx} + 13$; $y = 3$, $y' = 11$ при$x = 0$.

Контрольные вопросы:

1. Какое решение дифференциального уравнения называется общим и какое - частным?

Литература: **[2, с.246 – 252]**

Самостоятельная работа №5.

«Числовые ряды. Решение задач».

Цель работы:

уметь:

- вычислять пределы;

- исследовать ряды на сходимость и расходимость;

- находить радиус сходимости;

- разлагать функцию в ряд Маклорена.

Необходимые для выполнения работы знания:

студент должен:

знать:

- формулу признака Даламбера;

- формулу радиуса сходимости;

- правило разложения в ряд Маклорена.

Сведения из теории:

Числовым рядом называется выражение вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots,$$

где $u_1, u_2, \ldots, u_{n,\ldots}$ – действительные или комплексные числа, называемые членами ряда, $u_n -$ общим членом ряда.

Если существует конечный предел $S = \underset{n\to\infty}{Lim} S_n$ последовательности частичных сумм ряда, то этот предел называют и говорят, что ряд сходится. Записывают:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

Если $\underset{n\to\infty}{Lim} S_n$ не существует или $\underset{n\to\infty}{Lim} S_n = \infty$, то ряд называют расходящимся.

Признак Даламбера.

Признак Даламбера позволяет часто решить вопрос о сходимости ряда, проделав лишь некоторые операции над самим рядом.

Пусть дан ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots,$$

с положительными членами и существует конечный или бесконечный предел

$$\lim_{n\leftarrow\infty}\frac{u_n+1}{u_n}=l\ .$$

Тогда ряд сходится при $l<1$ и расходится при $l>1$.

Пример 18.

Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n^2}$.

Решение:

Вычисляем

$$l=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3^{n+1}}{(n+1)^2}\div\frac{3^n}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{3^n\cdot 3\cdot n^2}{3^n\cdot(n+1)^2}=3\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^2=3\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^2=3.$$

Так как $l=3>1$, то данный ряд по признаку Даламбера расходится.

Пример 19.

Исследовать сходимость ряда, используя признак Даламбера:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{5^n}=\frac{2}{5}+\frac{4}{25}+\frac{6}{125}+\cdots+\frac{2n}{5^n}+\cdots$$

Решение:

Подставив в общий член ряда $\frac{2n}{5^n}$ вместо n число $n+1$, получим $\frac{2(n+1)}{5^{n+1}}$.

Найдем предел отношения $(n+1)-$ го члена к n $-$му члену при $n\to\infty$:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{2(n+1)}{5^{n+1}}\div\frac{2n}{5^n}=\frac{2(n+1)}{5^n\cdot 5}\cdot\frac{5^n}{2n}=\frac{n+1}{5n};$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n+1}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{5n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n}{n}+\frac{1}{n}}{\frac{5n}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{5}=\frac{1+0}{5}=\frac{1}{5}$$

Так как $l=\frac{1}{5}<1$, то данный ряд сходится.

Числовой ряд

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots$$

называется знакопеременным, если среди его членов имеются как положительные, так и отрицательные числа.

Числовой ряд

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots$$

называется знакочередующимся, если любые два стоящие рядом члена имеют противоположные знаки. Этот ряд является частным случаем знакопеременного ряда.

Если члены знакочередующегося ряда монотонно убывают по абсолютной величине и общий член u_n стремится к нулю при $n \to \infty$, то ряд сходится.

Знакопеременный ряд

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots$$

называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд

$$|u_1| + |u_2| + |u_3| + \cdots + |u_n| + \cdots,$$

составленный из абсолютных величин его членов.

Если знакопеременный ряд сходится, а составленный из абсолютных величин его членов ряд расходится, то данный ряд называется условно сходящимся.

***Пример 20*.**

Исследовать на сходимость (абсолютную или условную) знакочередующийся ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + \cdots;$$

Решение:

Члены данного ряда по абсолютной величине монотонно убывают: $1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{4} > \cdots$ и $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0.$ Следовательно, согласно признаку Лейбница, ряд сходится.

Ряд $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots,$ составленный из абсолютных величин членов данного ряда, является гармоническим, который, как известно расходится. Поэтому данный ряд сходится условно.

Задания для самостоятельного решения:

Исследуйте сходимость ряда, используя признак Даламбера:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\cdots+\frac{1}{n^4}+\cdots;$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3\cdot 2^n}=\frac{1}{3\cdot 2}+\frac{2}{3\cdot 2^2}+\frac{3}{3\cdot 2^3}+\cdots+\frac{n}{3\cdot 2^n}+\cdots;$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n-1}{2n}=1+\frac{5}{4}+\frac{8}{6}+\cdots+\frac{3n-1}{2n}+\cdots;$$

Контрольные вопросы:

1) При каком условии числовой ряд сходится, при каком – расходится?
2) В чем суть признака Даламбера?

Литература: **[с. 489 - 520]**

Самостоятельная работа №6

« Построение графов»

Цель работы:

уметь:

Необходимые для выполнения работы знания:

студент должен:

знать:

Сведения из теории:

Граф представляется как множество вершин (узлов), соединенных ребрами.

В строгом определении графом называется пара множеств $G = (V, E)$, где V есть подмножество любого счетного множества , а $E -$ подмножество VxV.

Изображение графов на плоскости.

При изображении графов на рисунках чаще всего используется следующая система обозначений: вершины графа изображаются точками или, при конкретизации смысла вершины, прямоугольниками, овалами и др. где внутри фигуры раскрывается смысл вершины (графы блок-схем алгоритмов. Если между вершинами существует ребро, то соответствующие фигуры соединяются отрезком или дугой. В случае ориентированного графа дуги заменяют стрелками, или явно указывают направленность ребра. Различают планарные и непланарные графы.

Планарный граф - это граф, который можно изобразить на рисунке без пересечения рёбер (простейшие - треугольник или пара связанных вершин), иначе – непланарный.

Контрольные вопросы:

1) Что называется графом?
2) Как изображаются графы на плоскости?

Самостоятельная работа №7

«Формулы сложения и умножения вероятностей. Решение задач».

Цель работы:

уметь:

- вычислять вероятность;

- решать задачи на вероятности.

Необходимые для выполнения работы знания:

студент должен:

знать:

- определение вероятности;

- формулы сложения и умножения вероятности.

Сведения из теории:

Вероятностью события А называется отношение числа исходов m, благоприятствующих наступлению данному событию А, к числу n всех исходов.

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

Теорема сложения вероятностей несовместимых событий.

Вероятность одного из нескольких попарно несовместимых событий, безразлично какого, равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A + B) = P(A) + P(B);$$

$$P(A_1 + A_2 + \cdots + A_k) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_k).$$

Теорема сложения вероятностей совместных событий.

Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Для трех совместных событий имеет место формула

$$P(A + B + C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC).$$

Событие, противоположное событию А(т. е. ненаступление события А), обозначают через$\bar{A}$.

Сумма вероятностей двух противоположных событий равна единице

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1.$$

Пример 22.

Имеется 100 лотерейных билетов. Известно, что на 5 билетов попадает выигрыш по 20 руб., на 10 - по 15 руб., на 15 - по 10 руб., на 25 - по 2 руб. и на остальные - ничего. Найти вероятность того, что купленный билет будет получен выигрыш не меньше 10 руб.

Решение:

Пусть события A, B и $C -$ события, состоящие в том, что на купленный билет падает выигрыш, равный соответственно 20, 15 и 10руб. Так как события A, B и C несовместимы, то

$$P(A + B + C) = P(A) + P(B) + P(C) = \frac{5}{100} + \frac{10}{100} + \frac{15}{100} = 0{,}3.$$

Пример 23.

Три стрелка производят по одному выстрелу в мишень. Найти вероятность хотя бы одного попадания, если вероятность попадания в мишень для первого стрелка равна 0,7, для второго - 0,6, для третьего - 0,8.

Решение:

Введем обозначения событий: $A -$ хотя бы одно попадание в мишень, $B_1 -$ попадание первым стрелком, $B_2 -$ вторым стрелком, $B_3 -$ третьим стрелком.

События $\bar{B}_1, \bar{B}_2, \bar{B}_3$, противоположные событиям B_1, B_2, B_3, означают промахи соответственно первого, второго и третьего стрелков. Противоположное событие $\bar{A} = \bar{B}_1\bar{B}_2\bar{B}_3$ означает, что не произойдет ни одного попадания. По формуле $P(A) = 1 - P(\bar{B}_1\bar{B}_2\bar{B}_3)$. Так как события $\bar{B}_1$, $\bar{B}_2$ и $\bar{B}_3$ независимые, то $P(A) = 1 - P(\bar{B}_1)P(\bar{B}_2)P(\bar{B}_3)$. По формуле находим

$$P(\bar{B}_1) = 1 - P(B_1) = 1 - 0{,}7 = 0{,}3,$$

$$P(\bar{B}_2) = 1 - P(B_2) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4,$$

$$P(\bar{B}_3) = 1 - P(B_3) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2,$$

Следовательно, $P(A) = 1 - 0{,}3 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}2 = 0{,}976$.

Ответ: 0, 976.

Задания для самостоятельного решения:

1) Сколько различных трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3 при условии что ни одна цифра в числе не повторяется?

2) Сколькими способами можно выбрать двух человек в президиум, если на собрании присутствуют 65 человек?

3) Сколько существует вариантов распределения трех призовых мест, если в розыгрыше участвуют 5 команд?

4)Какова вероятность того, что при трёх бросаниях монеты она два раза упадет гербом кверху?

5) имеется две урны с шарами. в первой находится 7 белых и три красных шара, во второй - 5 белых и 5 красных шаров. Выбирают наугад одну из урн и вынимают из неё один шар. Найти вероятность того, что этот шар белый?

6) Бригадир должен отправить на работу бригаду из трех человек. Сколько таких бригад можно составить из 10 человек?

7) На собрании должны выступить 5 человек. Сколькими способами их можно разместить в списке выступающих?

8) Расписание одного дня состоит из 4 уроков. Определить число вариантов расписания при выборе из 8 дисциплин.

9) Произведено три выстрела по цели из орудия. Вероятность попадания при первом выстреле равна 0,75; при втором - 0,8; при третьем - 0,9. Определить вероятность того, что будет три попадания.

10) Среди 15 лампочек 4 стандартные. Одновременно берут наудачу две лампочки. Найти вероятность того, что хотя бы одна из них нестандартная

Контрольные вопросы:

1) Элементы комбинаторики, формулы для вычисления перестановок, размещений, сочетаний.

2) Классическое определение вероятности.

3) Теоремы сложения, умножения вероятностей.

Литература:**[3, с. 53 - 67]**

Самостоятельная работа № 8

« Конспект на тему: "Случайная величина. Дискретная и случайная величины. Закон распределения случайной величины".

Цель работы:

уметь:

-различать и осознанно использовать понятия - дискретные и случайные величины;

-конспектировать тему занятия;

Сведения из теории:

Составить конспект темы по следующему плану:

1.Понятие случайной величины.

2. Виды случайной величины.

3. Определение дискретной и непрерывной величин.

4. Задачи с решениями на случайную величину.

5. Определение закона распределения случайной величины.

6. Правило составления ряда распределения.

7. Правило составления функции распределения дискретной случайной величины.

8.Свойства функции распределения $F(x)$.

9. Задачи с решениями на составления ряда и функции случайной величины.

10. Обобщение.

Самостоятельная работа № 9

«Математическое ожидание, дисперсия дискретной случайной величины. Решение задач».

Цель работы:

уметь:

- вычислять математическое ожидание, дисперсию дискретной случайной величины.

Необходимые для выполнения работы знания:

студент должен:

знать:

- формулы для вычисления математического ожидания, дисперсии дискретной случайной величины.

Сведения из теории:

Определение:

Математическим ожиданием дискретной случайной величины называется сумма произведений возможных ее значений на соответствующие вероятности и обозначается $M(X)$:

$$M(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \cdots + x_np_{n.}$$

Пример 24.

Найти математическое ожидание числа очков, выпадающих при бросании игральной кости.

Решение:

Случайная величина X числа очков принимает значения 1, 2, 3, 4, 5, 6. Составим закон ее распределения:

Значения x_i	1	2	3	4	5	6
Вероятности p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Тогда $M(X) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = 3{,}5$

Дисперсией $D(X)$случайной величины X называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания:

$$D(X) = M(x - m)^2.$$

$x - m$ называют отклонением величины от математического ожидания.

Пример 25.

Пусть $X -$ число очков, выпадающих при одном бросании игральной кости. Найти дисперсию случайной величины:

Решение:

Закон распределения случайной величины X и ее математическое ожидание $M(X) = 3{,}5$ были найдены в предыдущей задаче.

Найдем отклонения для $x_1, x_2, \ldots, x_6$:

Задания для самостоятельного решения:

1)Право на выстрел в тире стоит 15 рублей. При попадании в мишень№1 получаете приз в 50 рублей, при попадании в мишень №2 - 20 рублей. В какую мишень выгодно стрелять, если вероятность попадания в мишени для вас соответственно равны 0,2 и 0,4? Найти математическое ожидание и дисперсия случайной величины.

2) Монету подбрасывают 5 раз. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины.

3) Правильная треугольная пирамида имеет пронумерованные грани 1, 2, 3, 4. Запишите закон распределения для выпадения номера грани, на которой стоит пирамида. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины.

Контрольные вопросы:

1) Что называется дисперсией случайной величины?
2) Что называется математическим ожиданием дискретной случайной величины?
3) Что называется законом распределения случайной величины?

Литература:[3, с. 106 -115]

Самостоятельная работа №10

« Вычисление интегралов по формулам прямоугольников, трапеций»

Цель работы:

уметь:

- вычислять определенные интегралы по формулам прямоугольников, трапеций, по формуле Симпсона.

Необходимые для выполнения работы знания:

студент должен:

знать:

- формулы прямоугольников, трапеций и формулу Симпсона для приближенного вычисления определенного интеграла.

Очень часто в процессе решения конкретных задач, как в научной, так и в инженерной практике возникает необходимость вычисления определенных интегралов вида:

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx$$

Заменяя подынтегральную функцию на каждом шаге отрезками линий нулевого, первого и второго порядков, получаем соответственно приближенные формулы для вычисления интеграла:
метод прямоугольников;
метод трапеций;
метод Симпсона.

Метод прямоугольников

Для подсчета интеграла разделим интервал интегрирования a,b на n равных отрезков длины

$$h = \frac{b-a}{n}$$

$$h = \frac{b-a}{n}$$

и высотами *f*(*xi*) где $x_{i=}a + i \cdot h,$ i = 1,2,3...n

Пример 26.
Вычислить

$$\int_0^{\pi/4} \cos x dx$$

методом прямоугольников.

Решение:
Разделим промежуток интегрирования на 5 частей. Тогда $n = 5;\ b - a = \frac{\pi}{4};$

$$\Delta x = \frac{(b-a)}{n} = \frac{\pi}{20} \approx 0{,}1571$$

Соответствующие значения подынтегральной функции найдем с помощью таблиц: y_0=$\cos 0° = 1$; y_1=$\cos(\pi/20)$=$\cos 9° = 0{,}9877$; y_2=$\cos(\pi/10) = \cos 18° = 0{,}9511$; y_3=$\cos(3\pi/20) = \cos 27° = 0{,}8910$; y_4=$\cos(\pi/5) = \cos 36° = 0{,}8910$; y_5=$\cos(\pi/4) = \cos 45° = 0{,}7071$
П о формуле прямоугольников имеем

$$A_{\text{прибл}} = \int_0^{\pi/4} \cos x dx \approx 0{,}1571(1 + 0{,}9877 + 0{,}9511 + 0{,}8910 + 0{,}8090) = 0{,}7288$$

А теперь вычислим по формуле Ньтона-Лейбница

$A_{\text{точн}} = \int_0^{\pi/4} \cos x dx \approx \sin x \Big|_0^{\pi/4} = \sin(\pi/4) - \sin 0 = 0{,}5\sqrt{2}$

Найдем относительную погрешность вычисления:

$$\delta = \frac{|\text{А}_{\text{прибл}} - \text{А}_{\text{точн}}|}{\text{А}_{\text{точн}}} 100\% = \frac{|0{,}7288 - 0{,}5\sqrt{2}|}{0{,}5\sqrt{2}} 100\% \approx 3{,}06\%$$

Метод трапеции

$$I(f) \approx T(f) = \frac{b-a}{2} f(a) + f(b)$$

Эта формула известна как *формула трапеции.*

Для того чтобы найти приближенное значение площади S, разделим отрезок интегрирования $[a, b]$ на n равных частей длины $h = \frac{b-a}{n}$

В точках разбиения $x_0 = a,\ x_1 = a + h, \ldots x_n = b$ проводим ординаты $y_0,\ y_1, y_2 \ldots\ y_n$ до пересечения с кривой $y = f(x)$, т.е. $y_i = f(x_i),\ x_i = a + i \cdot h$

Концы ординат соединяем прямолинейными отрезкам, т.е.
на каждом отрезке разбиения дугу графика подынтегральной функции $y = f(x)$ заменяем стягивающей ее хордой (линейная интерполяция), и получим трапецию.
Тогда площадь криволинейной трапеции *aABb* приближенно можно считать равной площади фигуры, ограниченной ломаной линией *aACD...Bb* .
Площадь этой фигуры, которую мы обозначим как *S*, равна сумме площадей трапеций:

$$S = h \cdot \left(\frac{y_0 + y_1}{2} + \frac{y_1 + y_2}{2} + \cdots + \frac{y_{n-1} + y_n}{2} \right) = \frac{b-a}{2n} (y_0 + 2y_1 + \cdots + 2y_{n-1} + y_n)$$

Таким образом, для интервала [*a*,*b*] и шага интегрирования *h* полная формула приближенного значения интеграла будет записана в виде:

$$I(f) = \left[\frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right]$$

где n - число разбиений для интервала $[a, b]$ и точка x_0 совпадает с a , а точка xn совпадает с b.

Пример 27.
Вычислить по формуле трапеций интеграл

$$\int_{2}^{12} \frac{dx}{x}$$

разбивая промежуток интегрирования на 10 равных частей. Оценить погрешность.

Решение:

По условию, $a = 2,\ b = 12,\ n = 10, \Delta x = 1$.

Вычислим значения подынтегральной функции $y = \frac{1}{x}$ в соответствующих точках деления: $x_0 = 2,\ y_0 = \frac{1}{2} = 0{,}5;$ $x_1 = 3$, $y_1 = 1/3 \approx 0{,}3333$; $x_2 = 4$, $y_2 = 1/4 = 0{,}25$; $x_3 = 5$, $y_3 = 1/5 = 0{,}2$; $x_4 = 6$, $y_4 = 1/6 \approx 0{,}1667$; $x_5 = 7$, $y_5 = 1/7 = 0{,}1429$; $x_6 = 8$, $y_6 = 0{,}125$; $x_7 = 9$, $y_7 = 0{,}1111$; $x_8 = 10$, $y_8 = 0{,}1$; $x_9 = 11$, $y_9 = 0{,}0909$; $x_{10} = 12$, $y_{10} = 0{,}0833$

Подставив найденные значения в формулу, получим

$$\int_{2}^{12} \frac{dx}{x} \approx 1\left(\frac{0{,}5 + 0{,}0833}{2} + 0{,}3333 + 0{,}25 + 0{,}2 + 0{,}1667 + 0{,}1429 + 0{,}125 + 0{,}111 + 0{,}1 + 0{,}0909\right) \approx 1{,}812.$$

Вычислим данный интеграл по формуле Ньютона-Лейбница

$$\int_{2}^{12} \frac{dx}{x} = lnx \Big|_{2}^{12} = ln12 - ln2 = ln6 \approx 1{,}792$$

Найдем погрешность приближенного вычисления:

$$\delta = \frac{1{,}812 - 1{,}792}{1{,}792} \cdot 100\% \approx 1{,}1\%$$

Метод Симпсона

Из других методов приближенного интегрирования следует отметить метод парабол (который также называют методом Симпсона).

$$\int_{a}^{b} f(x)dx \approx \frac{b-a}{3n}(y_0 + y_n + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{n-2}) + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{n-1}))$$

где n - четное число. Она называется формулой парабол(формулой Симпсона).

Применение этой формулы значительно повышает точность вычисления определенного интеграла.

Пример 28.

Вычислить по формуле Симпсона интеграл

$$\int_{1}^{4} x^2 dx$$

Решение:

Разобьем отрезок интегрирования на 10 равных частей. Тогда $\frac{(b-a)}{3n} = \frac{3}{30} = \frac{1}{10} = 0{,}1$. Подставляя в подынтегральную функцию $y = x^2$ значения аргумента $x_0 = 1$; $x_1 = 1{,}3$; $x_2 = 1{,}6, \ldots, x_{10} = 4$, найдем соответствующие значения ординат: $y_0 = 1$; $y_1=1{,}69$; $y_2=2{,}56$; $y_3=3{,}61$; $y_4=4{,}84$; $y_5=6{,}25$; $y_6=7{,}84$; $y_7=9{,}61$; $y_8=11{,}56$; $y_9=13{,}69$; $y_{10}=16$

Применяя формулу, получим

$$\int_1^4 x^2dx = 0{,}1(1+16+2(2{,}56+4{,}84+7{,}84+11{,}56)+4(1{,}69+3{,}61+$$

$$+6{,}25+9{,}61+13{,}69)) = 21.$$

Задания для самостоятельного решения.

1) Вычислить $\int_0^{\pi/2} \sin x dx$ методом прямоугольников, разделив промежуток $[0, \pi]$ на 10 равных частей. Найти точное значение интеграла по формуле Ньютона-Лейбница и относительную погрешность приближенного выражения.
2) Вычислить интеграл $\int_1^2 \frac{dx}{x}$ по формуле Ньтона-Лейбница и по приближенным формулам прямоугольников и трапеций, разбив промежуток интегрирования на 10 равных частей.
3) Вычислить интеграл $\int_1^2 \sqrt{6x-5}dx$ по формуле Ньтона-Лейбница и по приближенным формулам прямоугольников и трапеций, разбив промежуток интегрирования на 8 равных частей. Оцените погрешность результатов.
4) Вычислить интеграл $\int_0^{\pi} \cos x dx$, используя метод прямоугольников, разделив промежуток на 5 равных частей. Найти точное значение интеграла по формуле Ньтона-Лейбница и относительную погрешность приближенного вычисления.
5) Вычислить интеграл $\int_2^5 x^2 dx$ методом прямоугольников, разделив отрезок на 10 равных частей. Найти относительную погрешность вычисления.
6) Найти приближенно $\int_0^4 x^2 dx$ методом трапеций, разделив промежуток интегрирования на 10 равных частей. Вычислить погрешность приближения.

Контрольные вопросы:

1) Перечислить методы вычисления численного интегрирования.

2) В чем заключается сущность каждого из этих методов?

***Литература:* [2, с. 269 - 274]**

Самостоятельная работа №11.

«Нахождение производных функции в точке x по заданной таблично функции $y = f(x)$ методом численного дифференцирования».

Цель работы:

уметь:

- вычислять приближенно изменение функции при изменении аргумента;
- определять абсолютную и относительную погрешности вычисления;
- производить вычисления с заданной точностью.

Необходимые для выполнения работы знания:

студент должен:

знать:

- понятие дифференциала функции;
- формулы для вычисления абсолютной и относительной погрешностей.

Сведения из теории:

Рассмотрим вопрос об использовании дифференциалов в приближенных вычислениях.

Из формулы приращения функции: $\Delta y = dy + \alpha \Delta x$, где Δy - приращение функции, dy - дифференциал функции. А $\alpha \to 0$ при $x \to 0$, это позволяет сделать вывод о том, что $\Delta y \approx dy$, т.е. приближенное значение приращения функции совпадает с её дифференциалом.

Приближенное значение приращения функции

Пример 29.

Пользуясь понятием дифференциала функции, вычислить приближенно изменение функции $y=x^3-7x^2+80$ при изменении аргумента x от 5 до 5,01.

Решение:

находим $\Delta y \approx dy = y'\Delta x = (3x^2 - 14x)\Delta x$

При $x=5$, $\Delta x = 5{,}01 - 5 = 0{,}01$ получим

$$\Delta y\Big|_{\substack{x=5 \\ \Delta x=0{,}01}} = (3\cdot 5^2 - 14\cdot 5)0{,}01 = 0{,}05$$

Вычисление погрешности приближенного приращения функции

Пример 30.

Найти приближенно приращение функции $y=3x^2+2$ при $x=2$, $\Delta x = 0{,}001$. Определить абсолютную и относительную погрешности вычисления.

Решение:

т.к. приращение аргумента величина малая, то приращение функции можно заменить её дифференциалом:

$$\Delta y \approx dy\Big|_{\substack{x=2 \\ \Delta x=0{,}001}} = 6xdx\Big|_{\substack{x=2 \\ \Delta x=0{,}001}} = 6\cdot 2\cdot 0{,}001 = 0{,}012$$

Найдем ошибку, полученную при замене приращения функции её дифференциалом. Для этого вычислим точное значение приращения функции:

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x).$$

$$\Delta y = 3(x+\Delta x)^2 + 2 - (3x^2+2) = 3x^2 + 6x\Delta x + 3(\Delta x)^2 + 2 - 3x^2 - 2 = 6x\Delta x + 3(\Delta x)^2$$

$$dy\Big|_{\substack{x=2 \\ \Delta x=0{,}001}} = 6\cdot 2\cdot 0{,}001 + 3\cdot 0{,}000001 = 0{,}0120003$$

Сравнивая точное значение Δy с приближенным, видим, что абсолютная погрешность есть $\Delta = |\Delta y - dy| = 0{,}000003$.

Относительная погрешность составляет

$$\delta = \left|\frac{\Delta y - dy}{\Delta y}\right| = \frac{0{,}000003}{0{,}012003} \approx 0{,}00025 = 0{,}025\%$$

Вычисление приращения функции с заданной точностью

Пример 31.

С помощью дифференциала вычислить с точностью до 0,01 приращение функции $y = x\sqrt{x^2+5}$ при x=2, $\Delta x = 0{,}2$.

Решение:

находим дифференциал данной функции

$$dy = y'dx = (\sqrt{x^2+5} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2+5}})dx$$

При x=2, $\Delta x = 0{,}2$ получим

$$\Delta y \approx dy\Big|_{\substack{x=2\\ dx=0,2}} = (\sqrt{4+5} + \frac{4}{\sqrt{4+5}})0{,}2 \approx 0{,}866 \approx 0{,}87$$

Задания для самостоятельного решения:

1) Как приближенно изменится значение функции $y = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 5$ при изменении аргумента x от 3 до 3,1?

2) Найти абсолютную и относительную погрешности при замене приращения функции $y = x^3 + 2x$ её дифференциалом в точке x=2 при $\Delta x = 0{,}1$.

3) С помощью дифференциала вычислить с точностью до 0,001 приращение функции $y = \sqrt[3]{x^2}$ при x=1, $\Delta x = 0{,}2$.

4) Как приближенно изменится значение функции $y = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 5$ при изменении аргумента x от 3 до 3,1?

5) Найти абсолютную и относительную погрешности при замене приращения функции $y = -x^3 + x$ её дифференциалом в точке x=3 при $\Delta x = 0{,}1$.

6) С помощью дифференциала вычислить с точностью до 0,001 приращение функции $y = \sqrt[3]{1-x^2}$ при x=1, $\Delta x = 0{,}2$.

7) Как приближенно изменится значение функции $y=\frac{1}{3}x^3+x^2-5$ при изменении аргумента x от 3 до 3,1?

8) Найти абсолютную и относительную погрешности при замене приращения функции $y=x^3+2x$ её дифференциалом в точке x=2 при $\Delta x=0{,}1$.

9) С помощью дифференциала вычислить с точностью до 0,001 приращение функции $y=\sqrt[3]{x^2}$ при x=1, $\Delta x=0{,}2$.

Контрольные вопросы:

1) Что называется дифференциалом функции, чему он равен, как обозначается и каков его геометрический смысл?
2) Чем можно оправдать, что при малых значениях Δx приращение функции приближенно равно её дифференциалу? Что выражает геометрически формула $\Delta y \approx dy$?

Литература:[1, с. 254 - 257]

Самостоятельная работа № 12

«Построение интегральной кривой. Метод Эйлера. Нахождение значений функции с использованием метода Эйлера»

Цель работы:

уметь:

- вычислять значения функции с использованием метода Эйлера.

Необходимые для выполнения работы знания:

студент должен:

знать:

- последовательность вычисления значений функции методом Эйлера.

Сведения из теории:

Метод Эйлера

Дифференциальное уравнение $y'=f(x, y)$ определяет на плоскости так называемое поле направлений, т. е. определяет в каждой точке плоскости, в которой существует функция $f(x, y)$, направление интегральной кривой уравнения, проходящей через эту точку. Допустим, что требуется решить задачу Коши, т. е. найти решение уравнения $y'=f(x, y)$, удовлетворяющее начальным условиям $y(x_0)=y_0$. Разделим отрезок $[x_0, X]$ на n равных частей и положим

$$\frac{X-x_0}{n}=h,\ \ где\left(X=x_0+n\cdot h,\ h-шаг\ изменения\ аргумента\right)$$

Допустим, что внутри элементарного промежутка от x_0 до x_0+h функция y' сохраняет постоянное значение $f(x_0, y_0)$.

Тогда имеем

$$y_1-y_0\approx h\cdot f(x_0,\ y_0),$$

где y_1 – значение искомой функции, соответствующее значению $x_1= x_0+h$.

Отсюда получаем

$$y_1\approx y_0+h\cdot f(x_0,\ y_0)$$

Повторяя эту операцию, получим последовательные значения функции:

$$\begin{aligned}
&y_2\approx y_1+h\cdot f(x_1,\ y_1),\\
&y_3\approx y_2+h\cdot f(x_2,\ y_2),\\
&y_4\approx y_3+h\cdot f(x_3,\ y_3),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&y_{k+1}\approx y_k+h\cdot f(x_k,\ y_k)
\end{aligned}$$

Таким образом, мы можем приближенно построить интегральную кривую в виде ломаной с вершинами M_k ($_k$; xy_k), где

$$x_{k+1}=x_k+\Delta x_k,\ \ y_{k+1}=y_k+h\cdot f(x_k,\ y_k)$$

Этот метод называется *методом ломаной Эйлера*, или просто *методом Эйлера*.

Пример 32.

Найти, используя метод Эйлера, значения функции y, определяемой дифференциальным уравнением $y' = \frac{y-x}{y+x}$ при начальных условиях $y(0)=1$, принимая $h=0,1$. Ограничиться отысканием первых четырех значений y.

Решение:

при $h=0,1$ последовательные значения аргумента будут: $x_0=0$, $x_1=0,1$, $x_2=0,2$, $x_3=0,3$, … .

Вычислим соответствующие значения искомой функции:

$$y_1 \approx y_0 + h \cdot f(x_0,\ y_0) = 1 + 0,1 \cdot \frac{1-0}{1+0} = 1,1$$

$$y_2 \approx y_1 + h \cdot f(x_1,\ y_1) = 1,1 + 0,1 \cdot \frac{1,1-0,1}{1,1+0,1} = 1,183,$$

$$y_3 \approx y_2 + h \cdot f(x_2,\ y_2) = 1,183 + 0,1 \cdot \frac{1,183-0,2}{1,183+0,2} = 1,254,$$

$$y_4 \approx y_3 + h \cdot f(x_3,\ y_3) = 1,254 + 0,1 \cdot \frac{1,254-0,3}{1,254+0,3} = 1,315,$$

....

Таким образом, получаем таблицу:

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4
y	1	1,1	1,183	1,254	1,315

По полученной таблице значений строим интегральную кривую в прямоугольной декартовой системе координат.

Пример 33.

Найти, используя метод Эйлера, значения функции y, определяемой дифференциальным уравнением $y' = x + y$ при начальных условиях $y(0)=1$, принимая $h=0,1$. Ограничиться отысканием первых четырех значений y.

Решение:

при $h=0,1$ последовательные значения аргумента будут:

$$x_0=0,\ x_1=0{,}1,\ x_2=0{,}2,\ x_3=0{,}3,\ \dots .$$

Вычислим соответствующие значения искомой функции:

$$y_1 \approx y_0 + h\cdot f(x_0,\ y_0) = 1 + 0.1\cdot(0+1) = 1{,}1$$

$$y_2 \approx y_1 + h\cdot f(x_1,\ y_1) = 1{,}1 + 0{,}1\cdot(0{,}1+1{,}1) = 1{,}22,$$
$$y_3 \approx y_2 + h\cdot f(x_2,\ y_2) = 1{,}22 + 0{,}1\cdot(0{,}2+1{,}22) = 1{,}36,$$
$$y_4 \approx y_3 + h\cdot f(x_3,\ y_3) = 1{,}36 + 0{,}1\cdot(0{,}3+1{,}36) = 1{,}52,$$
....

Таким образом, получаем таблицу:

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4
y	1	1,1	1,22	1,36	1,52

По полученной таблице значений строим интегральную кривую в прямоугольной декартовой системе координат.

Задания для самостоятельного решения:

1) Найти, используя метод Эйлера, значения функции y, (пять значений) определяемой дифференциальным уравнением $y' = 10 - x^2 + y$ при начальных условиях $y(0)=3$, принимая $h=0{,}2$.

2) Найти, используя метод Эйлера, значения функции y, (четыре значения) определяемой дифференциальным уравнением $y' = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{y^3}{3}$ при начальных условиях $y(0)=1$, принимая $h=0{,}2$.

3) Найти, используя метод Эйлера, значения функции y, (пять значений) определяемой дифференциальным уравнением $y' = -3 + \frac{x}{y} + 2y^2$ при начальных условиях $y(2)=5$, принимая $h=0{,}3$.

4) Найти, используя метод Эйлера, четыре значения функции y, определяемой дифференциальным уравнением $y' = -3 + x^3 + \frac{y}{x}$ при начальных условиях $y(2)=1$, принимая $h=0{,}03$

5) Найти, используя метод Эйлера, четыре значения функции y, определяемой дифференциальным уравнением $y' = \frac{x^2}{3} - \frac{y^3}{2}$ при начальных условиях $y(1)=2$, принимая $h=0{,}05$

6) Найти, используя метод Эйлера, четыре значения функции y, определяемой дифференциальным уравнением $y' = \frac{x^2}{3} - \frac{y^3}{2}$ при начальных условиях $y(1)=2$, принимая $h=0,05$

Контрольные вопросы:

1. Суть метода Эйлера при решении дифференциальных уравнений методом численного интегрирования

Перечень рекомендуемой литературы:

1) Богомолов Н.В. Самойленко П.И. «Математика», - М., 2009

2) А. А. Дадаян «Сборник задач по математике» Москва, 2013

3)Е. С. Кочетков, С. О. Смерчинская, В. В. Соколов «Теория вероятностей и математическая статистика» Москва, 2013

4) В. С. Шипачев «Высшая математика» Москва, 2012

5) Богомолов Н.В. "Сборник задач по математике, Москва, Дрофа, 2009