

Документ подписан простой электронной подписью

Информация о владельце:

ФИО: Игнатенко Вячеслав Иванович

Должность: Проректор по учебной работе

Дата подписания: 06.02.2023 08:52:04

Уникальный программный ключ:

a49ae343af5448d45d7e3e1e499659da8109ba78

Министерство науки и высшего образования РФ

ФГБОУВО «Заполярный государственный

университет им. Н.М.Федоровского»

Кафедра технологических машин и оборудования

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Методические указания

Норильск 2022

ББК 22.1я7

Последовательности: метод. указ. / составитель А.Л. Брусков; Министерство науки и высшего образования РФ, Заполярный гос. ун-т им. Н.М. Федоровского. – Норильск: ЗГУ, 2022. – 32 с. – Библиогр.: с. 31. – Текст: непосредственный.

Цель: углубление математических знаний, отработка приёмов логических умозаключений, развитие навыков научного исследования. Предполагается наличие у студентов первоначальных сведений по теме «Последовательности» как школьного, так и вузовского уровня, на котором изучаются начала математического анализа. Для закрепления материала содержат достаточно широкую серию вопросов и задач, затрагивающих все стороны изложенной темы.

Предназначены для студентов 1–2 курсов естественнонаучного и технического профиля.

ВВЕДЕНИЕ

Из последовательностей в школьном курсе относительно подробно изучаются арифметическая и геометрическая прогрессии. В некоторых вузовских учебниках о последовательностях излагается ровно столько материала, сколько необходимо для понятия предела функции и производной. Между тем свойства последовательностей могут играть и самостоятельную роль, что позволяет углубить свои познания в естественнонаучных областях. Настоящие методические указания предназначены для студентов-первокурсников, приступающих к изучению дифференциального исчисления, но знакомых с понятием последовательности и имеющих первоначальные навыки вычисления пределов. Соответствующие разделы имеются в программах школьного курса.

Основные свойства последовательностей можно разбить на три направления: монотонные и немонотонные, ограниченные и неограниченные, сходящиеся и несходящиеся. Содержание методических указаний следует порядку перечисленных свойств. Значительное внимание уделено рекуррентно заданным, а также бесконечно большим последовательностям. Также предложены задачи для самостоятельного решения.

МОНОТОННОСТЬ

Одна из задач первого направления – исследовать последовательность на монотонность. Это можно сделать, опираясь непосредственно на определение. *Возрастающей последовательностью* называется такая, для которой выполняется: $a_{n+1} > a_n$. Если это неравенство выполняется для всех n , начиная с некоторого n_0 , то последовательность считается возрастающей именно для $n \geq n_0$. По определению, убывающая последовательность – такая, для которой $a_{n+1} < a_n$, с теми же оговорками.

Пример 1. Исследовать на монотонность последовательность $\{a_n\}$, если $a_n = \frac{n+2}{n+1}$.

Решим неравенство $a_{n+1} > a_n$, т.е. $\frac{(n+1)+2}{(n+1)+1} > \frac{n+2}{n+1}$.

Упростим: $\frac{n+3}{n+2} > \frac{n+2}{n+1}$.

Умножим обе части на положительное $(n+2)(n+1)$. Получим: $(n+3)(n+1) > (n+2)^2$, или $n^2 + 4n + 3 > n^2 + 4n + 4$, и, после сокращений, $3 > 4$, что неверно ни при каких значениях переменной n . А значит, при всех значениях n выполняется обратное неравенство: $a_{n+1} < a_n$, т.е. последовательность является убывающей.

К такому выводу можно прийти, преобразовав общий член последовательности, приведя его к такому виду:

$$a_n = \frac{1}{n+1} + 1.$$

Очевидно, что последовательность $\{n+1\}$ возрастающая, а $\left\{\frac{1}{n+1}\right\}$ – убывающая, и если к каждому члену убывающей последовательности прибавить единицу, то она останется убывающей.

Вообще, если последовательность $\{a_n\}$ возрастающая (или убывающая) и при всех значениях n сохраняет знак, то при положительном k обратная последовательность $\left\{\frac{k}{a_n}\right\}$ будет убывающей (возрастающей); при отрицатель-

ном k монотонность не изменится. Если же члены последовательности имеют разные знаки, то это правило неприменимо: при смене знака возникает резкая смена монотонности. Так, для возрастающей последовательности $-3, -2, -1, 1, 2, \dots$ обе обратные последовательности, как $-\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, -1, 1, \frac{1}{2}, \dots$, так и $\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1, -1, -\frac{1}{2}, \dots$, не являются монотонными (в первой $1 > -1$, во второй $-1 < 1$).

Заметим, что если к каждому члену монотонной последовательности прибавить любое число (одно и то же), то монотонность не изменится.

Очевидно также, что сумма двух возрастающих (или убывающих) последовательностей $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$, т.е. последовательность с общим членом $a_n + b_n$, является возрастающей (убывающей). То же правило действует и для произведения последовательностей $\{a_n \cdot b_n\}$ с оговоркой $a_n > 0$, $b_n > 0$ и для произведения положительной последовательности на постоянный положительный множитель $\{k \cdot a_n\}$, при отрицательном множителе монотонность меняется.

Пусть $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ – данные последовательности. Рассмотрим их композицию $\{a(b_n)\}$ – сложную последовательность, последовательность от последовательности. Например, если $a_n = \frac{3}{n}$, $b_n = \operatorname{arctg} n$, то композиция $a(b_n) = \frac{3}{\operatorname{arctg} n}$.

Другая композиция: $b(a_n) = \operatorname{arctg} \frac{3}{n}$. Если обе последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ возрастающие, то понятно, что любая их композиция будет возрастающей. Если же обе последовательности убывающие, то любая их композиция будет возрастающей. Действительно, возрастанию переменной n соответствует убывание b_n , что является аргументом для убывающей последовательности a_n . Следовательно, $\{a(b_n)\}$ будет возрастающей. Легко доказать, что возрастающая последовательность от убывающей или убывающая от возрастающей будут убывающими. Так, например, последовательность с общим членом $\operatorname{arctg} \frac{3}{n}$ яв-

ляется убывающей, как возрастающая $\{\arctg n\}$ от убывающей $\left\{\frac{3}{n}\right\}$.

Иногда при исследовании последовательности на монотонность можно использовать производную. Пример: $a^n = \sqrt[3]{n+2} - \sqrt{n}$. Заменим n на x и найдём производную

$$\text{функции } f(x) = \sqrt[3]{x+2} - \sqrt{x} : \frac{d(f(x))}{dx} = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x+2)^2}} - \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Заметим, что знаменатель первой дроби больше знаменателя второй дроби, т.к. степень $2/3 > 1/2$ и коэффициент $3 > 2$. Так что первая дробь меньше второй, значит, производная отрицательна, и функция убывающая, а значит, и последовательность убывающая.

Пример 2. Исследовать на монотонность последовательность с общим членом $a_n = \frac{n^2 + 2n + 6}{n^2 + 2n + 9}$.

Представим общий член в виде $a_n = \frac{n^2 + 2n + 9 - 3}{n^2 + 2n + 9} = 1 - \frac{3}{n^2 + 2n + 9}$. Знаменатель дроби – возрастающая последовательность как сумма возрастающих плюс константа. Обратная к ней с положительным коэффициентом 3 – убывающая. Знак «минус» превращает её опять в возрастающую. Наконец, слагаемое 1 не меняет монотонности.

Ответ: последовательность возрастающая.

Пример 3. Исследовать на монотонность последовательность с общим членом $a_n = \frac{n^3}{n^2 - 8n + 1}$. Рассмотрим

производную функции $y = \frac{x^3}{x^2 - 8x + 1}$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2(x^2 - 8x + 1) - x^3(2x - 8)}{(x^2 - 8x + 1)^2} = \frac{x^4 - 16x^3 + 3x^2}{(x^2 - 8x + 1)^2}.$$

На интервалах $(-\infty; 8 - \sqrt{61})$ и $(8 + \sqrt{61}; +\infty)$ производная неотрицательна, функция возрастает, между этими интервалами функция убывает. Отметим, что $8 - \sqrt{61} \in (0; 1)$, $8 + \sqrt{61} \in (15; 16)$. Значит, последовательность с

натуральным аргументом n убывает на промежутке $n \in \{1, 2, \dots, 15\}$ и возрастает при $n \geq 16$. Заметим, что последовательность начинает возрастать именно при $n = 16$, поскольку непосредственный подсчёт показывает, что $a_{15} > a_{16}$. Очевидно к тому же, что a_{16} будет наименьшим членом последовательности.

Пример 4. Исследовать на монотонность, если $a_n = \sqrt{n^2 + 3n} - n$.

Преобразуем общий член к виду $a_n = \frac{3n}{\sqrt{n^2 + 3n} - n} = \frac{3}{\sqrt{1 + \frac{3}{n}} - 1}$.

Последовательность $\frac{3}{n}$ убывающая, слагаемое 1 на эту монотонность не влияет. $\sqrt{1 + \frac{3}{n}}$ остаётся убывающей (возрастающая \sqrt{n} от убывающей $1 + \frac{3}{n}$ есть убывающая).

Ещё одна единица также не меняет монотонности. Наконец, положительное 3 «делится на убывающую», получается возрастающая последовательность.

Пример 5. Исследовать на монотонность, если $a_n = \frac{3^n - 2^n}{3^{n-1} + 2^{n-1}}$.

Преобразуем общий член: $a_n = \frac{3 \cdot 3^{n-1} - 2 \cdot 2^{n-1}}{3^{n-1} + 2^{n-1}} = \frac{(3 \cdot 3^{n-1} - 3 \cdot 2^{n-1}) - 5 \cdot 2^{n-1}}{3^{n-1} + 2^{n-1}} = 3 - \frac{5 \cdot 2^{n-1}}{3^{n-1} + 2^{n-1}} = 3 - \frac{5}{\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} + 1}$.

Последовательность $\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$ возрастающая, как степень с основанием $3/2 > 1$. Слагаемое 1 не меняет монотонности. Обратная последовательность $\frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} + 1}$ с положительным множителем 5 есть убывающая. Знак «минус»

превращает её в возрастающую, слагаемое 3 не меняет монотонности.

Ответ: возрастающая.

Пример 6. Исследовать на монотонность, если

$$a_n = \frac{70^n}{n^3}.$$

Рассмотрим частное $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{70^{n+1}}{(n+1)^3} \div \frac{70^n}{n^3} = \frac{70n^3}{(n+1)^3}.$

Числитель полученной дроби будет больше знаменателя при $70n^3 > (n+1)^3$, что равносильно $\sqrt[3]{70} \cdot n > n+1$ или $n > \frac{1}{\sqrt[3]{70}-1}.$

Поскольку $\sqrt[3]{70}-1 \in (3;4)$, непосредственным подсчётом устанавливаем, что $a_4 > a_3$, поэтому последовательность будет возрастающей, начиная с a_3 . Заметим при этом, что a_3 будет наименьшим членом последовательности.

ОГРАНИЧЕННОСТЬ

Если существует число t такое, что все члены последовательности удовлетворяют неравенству $a_n \geq t$, то последовательность называется *ограниченной снизу*. В последнем примере как раз выполняется $a_n \geq a_3$. Последовательность ограничена снизу. Если существует число M такое, что при всех n выполняется $a_n \leq M$, последовательность называется *ограниченной сверху*, а при наличии двух чисел t и M таких, что $t \leq a_n \leq M$, она называется *просто ограниченной*. Однако часто в случае односторонней ограниченности говорят «ограниченная», а «сверху» или «снизу» подразумевают.

Неограниченность, например, сверху, означает, что для любого числа M **найдутся** (т.е. необязательно все) члены последовательности a_k , для которых будет $a_k > M$. Аналогично для неограниченности снизу.

Пример 7. Исследовать на ограниченность последовательность с общим членом $a_n = \frac{n+2}{2n-13}$.

Решим неравенство $a_n > M$, где M – достаточно большое, вернее, сколь угодно большое число. Решение вида $n > n_0$ будет говорить о неограниченности сверху, а решение вида $n < n_0$ – о том, что при всех $n \geq n_0$ выполняется неравенство $a_n \leq M$. Среди членов с номерами от 1 до n_0 должен быть наибольший, скажем, n_k . Тогда для всех членов последовательности будет выполняться хотя бы одно из неравенств: $a_n \leq M$, $a_n \leq a_k$, что будет говорить об ограниченности сверху. Аналогичные результаты можно получить, решая неравенство $a_n < M$, что и сделаем.

$\frac{n+2}{2n-13} < M$. Видно, что при $n = 1, 2, \dots, 6$ члены последовательности отрицательны, и неравенство непременно выполняется (напомним, что M – достаточно большое положительное число). Для $n > 6$ имеем равносильное неравенство $n+2 < M(2n-13)$, откуда $n > \frac{13M+2}{2M-1}$. Если в ка-

честве n_0 взять целую часть последней дроби, то при всех $n > n_0$ выполняется $a_n < M$. Среди членов с номерами от 1 до n_0 (включая ранее упомянутые отрицательные) есть

наибольший, скажем, a_k . Поэтому для этих членов будет выполняться неравенство $a_n \leq a_k$. Из всего этого следует, что последовательность ограничена сверху.

То, что эта последовательность ограничена и снизу, видно по числу отрицательных членов: 6. Среди них найдётся наименьший, $a_1 = -3/11$, так что для всех членов имеет место неравенство $a_n \geq -3/11$.

Ограниченность последовательности $\left\{ \frac{n+2}{2n-13} \right\}$ можно

увидеть, преобразовав общий член. Ограниченность снизу просматривается и без преобразований: по конечному числу отрицательных членов. Для положительных членов

представим общий член в виде $a_n = \frac{1}{2} + \frac{8,5}{2n-13}$, из чего

видно, что последовательность убывающая. Значит, первый же положительный член является наибольшим, и все члены последовательности меньше его, что и требовалось обнаружить.

Пример 8. Исследовать на ограниченность, если $a_n = \sqrt[3]{8n - n^3} + \sqrt[3]{8n + n^3}$.

Преобразуем общий член: $a_n = \sqrt[3]{n^3 + 8n} - \sqrt[3]{n^3 - 8n}$.

При натуральных n первое слагаемое по модулю больше второго, поэтому $a_n > 0$, и, значит, последовательность ограничена снизу.

Прежде чем говорить об ограниченности сверху, рассмотрим несколько утверждений:

1. Если последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ ограничены снизу, то их сумма ограничена снизу. Для доказательства почленно сложим два неравенства: $a_n \geq m_1$, $b_n \geq m_2$, получим $a_n + b_n \geq m_1 + m_2$. Аналогично в случае ограниченности сверху, а также для любого конечного количества последовательностей.

2. Если последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ с положительными членами ограничены снизу, то их произведение ограничено снизу. Для доказательства достаточно почленно перемножить два соответствующих неравенства. Аналогично для ограниченности сверху.

3. Если последовательность $\{a_n\}$ с положительными членами ограничена снизу, то обратная последовательность $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ ограничена сверху, и наоборот. Из неравенства $a_n \geq m$ следует $\frac{1}{a_n} \leq \frac{1}{m}$, что и подтверждает сказанное.

Итак, $a_n = \sqrt[3]{n^3 + 8n} - \sqrt[3]{n^3 - 8n}$. Умножим и разделим на неполный квадрат суммы:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{16n}{\left(\sqrt[3]{n^3 + 8n}\right)^2 + \sqrt[3]{n^3 + 8n} \cdot \sqrt[3]{n^3 - 8n} + \left(\sqrt[3]{n^3 - 8n}\right)} = \\ &= \frac{16}{n \cdot \left(\left(\sqrt[3]{1 + \frac{8}{n^2}}\right)^2 + \sqrt[3]{1 - \frac{64}{n^4}} + \left(\sqrt[3]{1 - \frac{8}{n^2}}\right)^2 \right)}. \end{aligned}$$

Последовательность

$$\left\{ \left(\sqrt[3]{1 + \frac{8}{n^2}}\right)^2 + \sqrt[3]{1 - \frac{64}{n^4}} + \left(\sqrt[3]{1 - \frac{8}{n^2}}\right)^2 \right\}.$$

ограничена снизу как сумма ограниченных снизу последовательностей. Заметим к тому же, что она не имеет отрицательных членов. Последовательность $\{n\}$ также ограничена снизу ($n \geq 1$). Произведение положительных ограниченных снизу последовательностей является ограниченной снизу последовательностью. Значит, обратная к ней последовательность вместе с положительным множителем 16 будет последовательностью, ограниченной сверху.

Пример 9. Исследовать на ограниченность, если $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{a_n}$.

Поскольку $a_n > 0$, что очевидно, то последовательность ограничена снизу.

Возьмём число 2 (впрочем, можно взять любое другое достаточно большое число) и рассмотрим неравенство $a_{n+1} > 2$,

т.е. $\frac{2}{3}a_n + \frac{1}{a_n} > 2$, которое равносильно следующему: $2a_n^2 - 6a_n + 3 > 0$. Решив его относительно a_n , получим:

$$a_n < \frac{3 - \sqrt{3}}{2} \approx 0,63$$

или

$$a_n > \frac{3 + \sqrt{3}}{2} \approx 2,37.$$

Это значит, что какой-то член последовательности окажется больше 2, если предыдущий член удовлетворяет одному из двух последних неравенств. Но такое невозможно, поскольку $a_1 = 1$ не удовлетворяет ни одному из этих неравенств. *Вывод:* всякое $a_n < 2$, т.е. последовательность ограничена сверху.

СХОДИМОСТЬ

Известное определение предела часто используется в примерах, где требуется доказать, что некоторое число является пределом данной последовательности. Число A называется *пределом последовательности* $\{a_n\}$, если для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ найдётся такое n_0 , что при всех $n > n_0$ выполняется неравенство $|a_n - A| < \varepsilon$.

Пример 10. Доказать, что число 2 является пределом последовательности с общим членом $a_n = \frac{2n - 3}{n + 4}$.

Пусть $\varepsilon > 0$ – сколь угодно малое число. Составим неравенство $\left| \frac{2n - 3}{n + 4} - 2 \right| < \varepsilon$ и решим его относительно переменной n . Сначала упростим. Вычтя под знаком модуля 2, получим $\left| \frac{-11}{n + 4} \right| < \varepsilon$. Поскольку n натуральное, то

$\left| \frac{-11}{n + 4} \right| = \frac{11}{n + 4}$. Тогда $\frac{11}{n + 4} < \varepsilon$ или $11 < \varepsilon(n + 4)$, откуда $n > \frac{11 - 4\varepsilon}{\varepsilon}$. Это значит, что существует такое натуральное

n_0 (а именно $\left\lceil \frac{11 - 4\varepsilon}{\varepsilon} \right\rceil + 1$, начиная с которого все члены последовательности оказываются в ε -интервале числа 2, т.е. $a_n \in (2 - \varepsilon; 2 + \varepsilon)$, что и означает, что число 2 – предел данной последовательности.

Можно ошибочно подумать, что точно такой же результат получится, если предположить, что пределом той же последовательности является, скажем, число 1. Попробуем «доказать» такую версию. Составим и решим известное неравенство: $\left| \frac{2n - 3}{n + 4} - 1 \right| < \varepsilon$, $\left| \frac{n - 7}{n + 4} \right| < \varepsilon$. При достаточно больших значениях n , а вообще говоря, при $n > 7$ $\left| \frac{n - 7}{n + 4} \right| = \frac{n - 7}{n + 4}$, так что неравенство равносильно $\frac{n - 7}{n + 4} < \varepsilon$, или $n - 7 < \varepsilon(n + 4)$, откуда $\varepsilon n - n > -7 - 4\varepsilon$, $n(\varepsilon - 1) > -7 - 4\varepsilon$,

и, казалось бы, получается $n > \frac{-7 - 4\varepsilon}{\varepsilon - 1}$, или $n > \frac{-7 + 4\varepsilon}{1 - \varepsilon}$. Но

это ошибка. Ведь число ε какое угодно, но *малое*, меньшее не только единицы, но и любого фиксированного, близкого к нулю числа. Так что величина $(\varepsilon - 1)$, на которую делим обе части неравенства, отрицательна, и при делении требуется знак «>» поменять на «<». И тогда получится верное решение $n < \frac{-7 - 4\varepsilon}{\varepsilon - 1}$, или $n < \frac{7 + 4\varepsilon}{1 - \varepsilon}$. А это означает, что

исходное неравенство $\left| \frac{2n - 3}{n + 4} - 1 \right| < \varepsilon$ выполняется не для

всех n , начиная с какого-то n_0 , а до какого-то значения n . То есть в ε -интервале $(1 - \varepsilon; 1 + \varepsilon)$ оказывается конечное число членов последовательности, а значит, число 1 не является пределом данной последовательности. Заметим, что в других случаях при правильном решении в ответе типа $n < \frac{7 + 4\varepsilon}{1 - \varepsilon}$ может вообще не оказаться натуральных чисел.

Таким образом, чтобы воспользоваться определением для доказательства того, что число A является пределом последовательности, прежде надо заполучить это число или, по крайней мере, держать его в подозрении.

Пример 11. Найти предел последовательности с общим членом $a_n = \frac{3n + 1}{n + 2}$.

Составим неравенство:

$$\left| \frac{3n + 1}{n + 2} - A \right| < \varepsilon,$$

где A – искомый предел; ε – сколь угодно малое положительное число.

Будем искать такое A , при котором это неравенство имеет решение в виде бесконечного интервала $n > ?$ – именно *больше* чего-то. Среди этого «чего-то» обязательно найдётся наименьшее целое (вернее натуральное) число, которое обозначим как n_0 .

Учитывая, что при натуральных n знаменатель $n + 2 > 0$, заменим наше неравенство равносильным: $\left| 3n + 1 - An - 2A \right| < n\varepsilon + 2\varepsilon$, что в свою очередь равносильно системе:

$$\begin{cases} 2A - 1 - 2\varepsilon < n(3 - A + \varepsilon); \\ n(3 - A - \varepsilon) < 2A - 1 + 2\varepsilon. \end{cases}$$

Решение этой системы зависит от знаков выражений $3 - A + \varepsilon$ и $3 - A - \varepsilon$. Понятно, что первое выражение больше второго.

Заметим также, что $2A - 1 - 2\varepsilon < 2A - 1 + 2\varepsilon$.

Рассмотрим 4 случая:

1. $3 - A + \varepsilon > 0$, $3 - A - \varepsilon > 0$. Тогда решением системы будет интервал $\left(\frac{2A - 1 - 2\varepsilon}{3 - A + \varepsilon}; \frac{2A - 1 + 2\varepsilon}{3 - A - \varepsilon}\right)$, который имеет право на существование, поскольку левая дробь меньше правой. Но это решение не устраивает: нужен бесконечный интервал.

2. $3 - A + \varepsilon > 0$, $3 - A - \varepsilon < 0$. В этом случае решением должно быть пересечение двух интервалов: $\left(-\infty; \frac{2A - 1 - 2\varepsilon}{3 - A + \varepsilon}\right)$ и $\left(\frac{2A - 1 + 2\varepsilon}{3 - A - \varepsilon}; +\infty\right)$. Но эти интервалы не пересекаются, так как правый конец левого меньше, чем левый конец правого. Значит, решения нет вообще.

3. $3 - A + \varepsilon < 0$, $3 - A - \varepsilon > 0$. Здесь решением будет пересечение двух интервалов: $\left(-\infty; \frac{2A - 1 - 2\varepsilon}{3 - A + \varepsilon}\right)$ и $\left(-\infty; \frac{2A - 1 + 2\varepsilon}{3 - A - \varepsilon}\right)$, а именно первый из них. Это опять не устраивает: т.к. нужен интервал не от минус бесконечности до ..., а от ... до плюс бесконечности.

4. $3 - A + \varepsilon > 0$, $3 - A - \varepsilon < 0$. Наконец, получаем то, что ожидали. Решением будет пересечение двух интервалов: $\left(\frac{2A - 1 - 2\varepsilon}{3 - A + \varepsilon}; +\infty\right)$ и $\left(\frac{2A - 1 + 2\varepsilon}{3 - A - \varepsilon}; +\infty\right)$, а именно второй из них, в котором обязательно содержатся натуральные числа, а среди них и наименьшее n_0 . Система $3 - A + \varepsilon > 0$, $3 - A - \varepsilon < 0$ означает, что число 3 находится в середине интервала $(A - \varepsilon; A + \varepsilon)$, а результат данного решения говорит о том, что, начиная с некоторого n_0 , все члены последовательности $\left\{\frac{3n + 1}{n + 2}\right\}$ находятся в том же интервале, и

так будет при любом сколь угодно малом положительном ε . Значит, число 3 является пределом последовательности.

Рассмотрим пример вычисления предела за рамками определения. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n}$. Начнём с того, что при $n > 1$ выполняется неравенство $\sqrt[n]{n} > 1$. Обозначим $\sqrt[n]{n} - 1 = a_n$, т.е. $\sqrt[n]{n} = 1 + a_n$. Возведём обе части этого равенства в n -ю степень:

$$n = 1 + n \cdot a_n + \frac{n(n-1)}{2!} a_n^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} a_n^3 + \dots$$

Так как сумма положительных слагаемых больше любого отдельного слагаемого, то $n > \frac{n(n-1)}{2!} a_n^2$, откуда

$a_n < \sqrt{\frac{2}{n-1}}$. Но поскольку $\frac{2}{n-1} \rightarrow 0$, то и $\sqrt{\frac{2}{n-1}} \rightarrow 0$, т.е. $a_n \rightarrow 0$, а значит, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Рассмотрим предел функции:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\ln x^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{\ln x}{x}} = e \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x}.$$

Далее воспользуемся правилом Лопиталя:

$$e \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = e^0 = 1.$$

При исследовании на сходимость большую роль может сыграть теорема Вейерштрасса, которая соединяет монотонность, ограниченность и сходимость в одно целое: если последовательность монотонна и ограничена, то она имеет предел. При этом если последовательность возрастающая, то она должна быть ограниченной сверху, а если убывает, то – снизу. Пределом в обоих случаях будет точная граница.

Ещё одна теорема (совершенно очевидная): $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1}$, что означает, что если последовательность $\{a_n\}$ имеет предел (в том числе и бесконечный), то последовательность $\{a_{n+1}\}$ имеет тот же предел. Вместо единицы может быть любое натуральное число k , так что $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+k}$.

Пример 12. Найти предел последовательности с общим членом $a_n = \frac{n^k}{b^n}$, если этот предел существует; $k, b > 0$.

Рассмотрим отношение:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^k b^n}{b^{n+1} n^k} = \frac{(n+1)^k}{bn^k}.$$

Решим неравенство $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ относительно n , т.е. поставим вопрос: при каких значениях n последовательность возрастает:

$$\frac{(n+1)^k}{bn^k} > 1, \quad (n+1)^k > bn^k, \quad n+1 > n \cdot \sqrt[k]{b}.$$

Дальше рассмотрим два случая: $b < 1$ и $b > 1$ (случай $b = 1$ очевиден: $a_n \rightarrow +\infty$).

При $b < 1$ $n > \frac{-1}{1 - \sqrt[k]{b}}$, т.е. n – любое натуральное число. При всех натуральных n последовательность возрастает. Заменяя b на $\frac{1}{c}$, где $c > 1$, получим: $a_n = n^k c^n \rightarrow +\infty$, последовательность не является ограниченной и не имеет предела.

Если $b > 1$, то $n < \frac{1}{\sqrt[k]{b} - 1}$, т.е. последовательность возрастает, начиная с $n = 1$ до целой части величины $\frac{1}{\sqrt[k]{b} - 1}$,

при всех n от $\left\lfloor \frac{1}{\sqrt[k]{b} - 1} \right\rfloor$ до $+\infty$ последовательность убывает. Её

ограниченность снизу очевидна: $a_n < 0$. По теореме Вейерштрасса есть предел. Обозначим его A . Таким образом, $a_n \rightarrow A$, а также $a_{n+1} \rightarrow A$. Заметим, что убывающая положительная последовательность может иметь только конечный предел.

Отношение $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^k}{bn^k}$ преобразуем к виду

$a_{n+1} = \frac{(n+1)^k}{bn^k} \cdot a_n$ и устремим n к $+\infty$: поскольку $\frac{(n+1)^k}{bn^k} \rightarrow \frac{1}{b}$, то $A = \frac{1}{b} \cdot A$. Это равенство возможно лишь при $A = 0$.

Ответ: предел существует при $b > 1$, и он равен нулю.

Пример 13. Исследовать на сходимость последовательность, которая задана рекуррентно:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right), \quad x_1 = a, \quad a > 0.$$

Рассмотрим неравенство $x_{n+1} > x_n$,

то есть

$$\frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right) > x_n,$$

которое равносильно $a > x_n^2$ или $x_n < \sqrt{a}$. Это значит, что последовательность будет возрастать, начиная с x_n , если $x_n < \sqrt{a}$. Следовательно, если $x_n > \sqrt{a}$, то она будет убывать. Посмотрим, возможно ли, чтобы x_n (а это всё равно, что x_{n+1}) было больше \sqrt{a} . Решим неравенство $x_{n+1} > \sqrt{a}$:

$$\frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right) > \sqrt{a}; \quad x_n^2 + a > 2x_n \sqrt{a}; \quad (x_n - \sqrt{a})^2 > 0.$$

Последнее неравенство выполняется всегда, за исключением случая, когда $x_n = \sqrt{a}$, тогда неравенство обращается в равенство, но тогда и все следующие члены будут равны \sqrt{a} . Значит, если последнее неравенство выполняется всегда, то последовательность является убывающей. А если задать $x_1 < \sqrt{a}$? Тогда

$$x_2 = \frac{1}{2} \left(x_1 + \frac{a}{x_1} \right) > \sqrt{a},$$

в чём легко убедиться: $x_1^2 + a > 2x_1 \sqrt{a}$, $(x_1 - \sqrt{a})^2 > 0$, что очевидно. Итак, если даже первый член последовательности

будет меньше \sqrt{a} , то второй будет неизбежно больше, и последовательность будет убывать, начиная со второго члена, оставаясь больше \sqrt{a} (ограничена снизу). Вывод: она имеет предел. Этот предел обозначим A . Поскольку $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1}$, то $\frac{1}{2} \left(A + \frac{a}{A} \right) = A$. Решив это уравнение относительно A , получим: $A = \sqrt{a}$.

Пример 14. Исследовать на сходимость последовательность, если $a_{n+1} = \frac{a_n + 1}{2}$, $a_1 = 3$.

Рассмотрим неравенство $a_{n+1} < a_n$: $\frac{a_n + 1}{2} < a_n$, что равносильно $a_n > 1$. Это значит, что если какой-то n -й член последовательности больше единицы, то следующий $(n + 1)$ -й будет меньше чем n -й; налицо признак убывания. Но при этом $(n + 1)$ -й может оказаться меньше единицы, и тогда характер монотонности изменится: $(n + 2)$ -й член обязан быть уже больше $(n + 1)$ -го. Проверим, может ли какой-то член последовательности быть меньше единицы: $\frac{a_n + 1}{2} < 1$, что равносильно $a_n < 1$. Значит, член последовательности может оказаться меньше единицы, если предыдущий член меньше единицы. В данном случае, поскольку $a_1 = 3 > 1$, все члены последовательности будут больше единицы. Это значит, что последовательность, во-первых, убывающая, во-вторых, ограничена снизу. Согласно теореме Вейерштрасса, она имеет предел, который обозначим буквой A . По свойствам сходящихся последовательностей $A = \frac{A + 1}{2}$, откуда $A = 1$.

Пример 15. Исследовать на сходимость последовательность

$$x_1 = \frac{a}{2}; x_2 = \frac{a}{2} - \frac{x_1^2}{2}; x_3 = \frac{a}{2} - \frac{x_2^2}{2}; x_n = \frac{a}{2} - \frac{x_{n-1}^2}{2}; a \in (0; 1).$$

$$\text{Рассмотрим разность: } x_2 - x_1 = \frac{a}{2} - \frac{x_1^2}{2} - \frac{a}{2} = -\frac{x_1^2}{2} < 0.$$

Кроме того, $x_2 = \frac{a}{2} - \frac{x_1^2}{2} = \frac{a}{2} - \frac{a^2}{8} = \frac{a(4-a)}{8} > 0$.

Значит, $0 < x_2 < x_1$.

Далее $x_3 - x_2 = \frac{a}{2} - \frac{x_2^2}{2} - \frac{a}{2} + \frac{x_1^2}{2} = \frac{x_1^2 - x_2^2}{2} > 0$.

Значит, $x_3 > x_2$.

Далее $x_3 - x_1 = \frac{a}{2} - \frac{x_2^2}{2} - \frac{a}{2} = -\frac{x_2^2}{2} < 0$. Значит, $x_3 < x_1$, и,

следовательно, $x_2 < x_3 < x_1$.

Продолжим: $x_4 - x_3 = \frac{x_2^2 - x_3^2}{2} < 0$, значит, $x_3 > x_4$; $x_4 - x_2 = \frac{x_1^2 - x_3^2}{2} > 0$, значит, $x_4 > x_2$. Следовательно, $x_2 < x_4 < x_3$.

Точно так же получим $x_4 < x_5 < x_3$.

Убедимся, что $x_{2n} < x_{2n+1} < x_{2n-1}$, а $x_{2n} < x_{2n+2} < x_{2n+1}$, то есть, что последовательность $x_1, x_3, x_5, \dots, x_{2n-1}, \dots$ убывающая, а $x_2, x_4, x_6, \dots, x_{2n}, \dots$ — возрастающая. Для этого достаточно, предположив справедливость этого утверждения для всех натуральных чисел, меньше либо равных некоторого n , доказать его справедливость и при $n + 1$. Иными словами, надо доказать, что из двух цепочек неравенств $x_{2n} < x_{2n+1} < x_{2n-1}$ и $x_{2n} < x_{2n+2} < x_{2n+1}$ следуют две другие цепочки: $x_{2n+2} < x_{2n+3} < x_{2n+1}$ и $x_{2n+2} < x_{2n+4} < x_{2n+3}$. Тем самым будет реализован метод математической индукции.

Имеем: $x_{2n+2} - x_{2n+1} = \frac{x_{2n}^2 - x_{2n+1}^2}{2} < 0$, значит, $x_{2n+2} < x_{2n+1}$;

$x_{2n+3} - x_{2n+2} = \frac{x_{2n+1}^2 - x_{2n+2}^2}{2} < 0$, значит, $x_{2n+3} > x_{2n+2}$;

$x_{2n+3} - x_{2n+1} = \frac{x_{2n}^2 - x_{2n+2}^2}{2} < 0$, значит, $x_{2n+3} < x_{2n+1}$.

Следовательно, $x_{2n+2} < x_{2n+3} < x_{2n+1}$;

$x_{2n+2} - x_{2n+3} = \frac{x_{2n+2}^2 - x_{2n+1}^2}{2} < 0$, значит, $x_{2n+2} < x_{2n+3}$;

$x_{2n+4} - x_{2n+3} = \frac{x_{2n+2}^2 - x_{2n+3}^2}{2} < 0$, значит, $x_{2n+4} < x_{2n+3}$;

$$x_{2n+2} - x_{2n+4} = \frac{x_{2n+3}^2 - x_{2n+1}^2}{2} < 0, \text{ значит, } x_{2n+2} < x_{2n+4}.$$

Следовательно, $x_{2n+2} < x_{2n+4} < x_{2n+3}$, что и требовалось доказать.

По теореме Вейерштрасса эти монотонные и ограниченные последовательности имеют пределы. Обозначим их как A и B . В равенствах $x_{2n+1} = \frac{a}{2} - \frac{x_{2n}^2}{2}$ и $x_{2n} = \frac{a}{2} - \frac{x_{2n-1}^2}{2}$

перейдём к пределу при $n \rightarrow \infty$. Получим: $A = \frac{a}{2} - \frac{B^2}{2}$,

$B = \frac{a}{2} - \frac{A^2}{2}$. Решим эту систему. После вычитания имеем:

$A - B = \frac{A^2 - B^2}{2}$, или $(A - B) \left(1 - \frac{A + B}{2}\right) = 0$. Так как при лю-

бом натуральном n $x_n \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$, то $A + B < 2$, и скобка

$\left(1 - \frac{A + B}{2}\right) = 0$ не может равняться нулю. Значит, $A - B = 0$,

после чего получаем, что $A = B = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt{1 + a} - 1$.

Запись $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ означает, что каково бы ни было положительное число M , найдётся такое n_0 , что при всех $n > n_0$ выполняется неравенство $x_n > M$. В этом случае говорят, что последовательность имеет предел, равный плюс бесконечности. На самом деле, согласно определению, предела, как такового, нет, но запись $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ наряду с $x_n \rightarrow +\infty$ употребляется. Ещё говорят, что последовательность расходится к плюс бесконечности. Аналогично, когда последовательность расходится к минус бесконечности. Это означает, что каково бы ни было положительное число M , найдётся такое n_0 , что при всех $n > n_0$ выполняется неравенство $x_n < -M$. В краткой записи: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$ или $x_n \rightarrow -\infty$.

Докажем с помощью определения, что последовательность с общим членом $x_n = n^2$ расходится к плюс бесконечности. Пусть M – сколь угодно большое положительное число. Составим неравенство $n^2 > M$, которое выполняется при всех $n > \sqrt{M}$, т.е. найдётся такое n_0 , а именно

$\lceil \sqrt{M} \rceil + 1$, для которого при всех $n > n_0$ выполняется неравенство $x_n > M$.

Докажем, что последовательность с общим членом $x_n = 1 - \sqrt{n}$ расходуется к минус бесконечности. Составим неравенство $1 - \sqrt{n} < -M$ и решим его относительно n . Получим: $n > (1 + M)^2$. Искомое $n_0 = \lceil (1 + M)^2 \rceil + 1$.

Следует различать три вида похожих друг на друга последовательностей: расходящиеся к плюс или минус бесконечности, бесконечно большие последовательности и неограниченные. Определения первых уже рассмотрели.

Бесконечно большими последовательностями (или просто расходящимися к бесконечности) называются те, для которых $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = +\infty$. Для таких последовательностей приняты записи: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ или $x_n \rightarrow \infty$ (без знака «плюс» или «минус»). Примером бесконечно большой может служить последовательность с общим членом $x_n = (-1)^n n^2$: -1 ; 4 ; -9 ; 16 ; -25 ; ... и т.д. Другое истолкование бесконечно большой последовательности: все члены последовательности, начиная с некоторого n_0 , находятся вне конечного отрезка $[-M; M]$, а внутри его может содержаться лишь конечное число членов. Всякая расходящаяся к плюс или минус бесконечности последовательность, очевидно, является одновременно и бесконечно большой, обратное неверно, примером чего может служить только что приведённая последовательность.

Для неограниченной, скажем, сверху последовательности для любого сколь угодно большого M найдётся такой член последовательности x_k , который больше M . Поэтому всякая бесконечно большая или расходящаяся к плюс или минус бесконечности последовательность является одновременно и неограниченной. Вместе с тем существуют неограниченные последовательности, не являющиеся бесконечно большими или расходящимися к плюс или минус бесконечности. Пример: последовательность с общим членом $x_n = n \cdot \sin \frac{\pi n}{2}$, члены которой при нечётных n становятся бесконечно большими по абсолютной величине, а при чётных – равны нулю.

Для бесконечно больших или расходящихся к плюс или минус бесконечности последовательностей характерны соотношения: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} = 0$. Обратно, если a_n – бесконечно малая последовательность ($a_n \rightarrow 0$), то при сохранении соответствующего знака $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = \pm\infty$. В символической записи это выглядит так: $\frac{1}{\infty} = 0$, $\frac{1}{0} = \infty$.

О свойствах последовательностей с бесконечными пределами

Вместо «последовательность с общим членом x_n » будем писать «последовательность $\{x_n\}$ ». Очевидны следующие утверждения:

1. Если $a_n \rightarrow +\infty$, а последовательность $\{b_n\}$ либо ограничена, либо ограничена снизу, то $\{a_n + b_n\} \rightarrow +\infty$.

2. Если $a_n \rightarrow -\infty$, а последовательность $\{b_n\}$ либо ограничена, либо ограничена сверху, то $\{a_n + b_n\} \rightarrow -\infty$.

3. Если $a_n \rightarrow +\infty$, а последовательность $\{b_n\}$ такова, что $b_n > M > 0$ при любом n , то $a_n b_n \rightarrow +\infty$.

4. Если $a_n \rightarrow +\infty$, а последовательность $\{b_n\}$ такова, что $0 < b_n < M$ при любом n , то $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow +\infty$.

5. Если $a_n \rightarrow 0$, а последовательность $\{b_n\}$ такова, что $|b_n| > M > 0$ при любом n , то $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow 0$.

6. Если $|a_n| < M$, а последовательность $\{b_n\}$ такова, что $|b_n| \rightarrow +\infty$ при любом n , то $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow 0$.

7. Если $|b_n| \rightarrow 0$, а последовательность $\{a_n\}$ такова, что $|a_n| > M > 0$ при любом n , то $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow +\infty$.

8. Если $a_n \rightarrow +\infty$, а последовательность $\{b_n\}$ такова, что $b_n \geq a_n$ при любом n , то $|b_n| \rightarrow +\infty$.

Например, если $a_n = \sqrt{n}$, $b_n = 2\cos(n + 1) + 3$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = +\infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = +\infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = 0$.

Во многих случаях имеют место следующие так называемые неопределённости, когда вопрос о пределе последовательности остаётся открытым и требует исследования – раскрытия неопределённости:

1. Требуется исследование вопроса о пределе последовательности $\{a_n - b_n\}$, если $a_n \rightarrow +\infty$, $b_n \rightarrow +\infty$, неопределённость вида $\infty - \infty$.

2. $\{a_n b_n\}$, если $a_n \rightarrow +\infty$, $b_n \rightarrow 0$: неопределённость вида $\infty \cdot 0$.

3. $\left\{ \frac{a_n}{b_n} \right\}$, если $a_n \rightarrow +\infty$, $b_n \rightarrow +\infty$ неопределённость вида $\left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\}$.

4. $\left\{ \frac{a_n}{b_n} \right\}$, если $a_n \rightarrow 0$, $b_n \rightarrow 0$ неопределённость вида $\left\{ \frac{0}{0} \right\}$.

5. $\{a^n b^n\}$, если $a_n \rightarrow 0$, $b_n \rightarrow 0$ неопределённость вида 0^0 .

6. $\{a^n b^n\}$, если $a_n \rightarrow 1$, $b_n \rightarrow +\infty$ неопределённость вида 1^∞ .

Однако часто указанное исследование довольно простое. Например, если $a_n = n + 5$, $b_n = n + 1$, $c_n = n$, $d_n = 3n$, $f_n = n^2$, то следующие пределы легко вычисляются, раскрывая соответствующие неопределённости:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (n + 5 - n - 1) = 4;$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - c_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (n + 5 - n) = 5;$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - c_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (n + 1 - n) = 1;$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (c_n - f_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (n - n^2) = \lim_{n \rightarrow \infty} n(1 - n) = -\infty;$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+5}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{5}{n}}{1 + \frac{1}{n}} = 1;$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_n}{d_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{3n} = \frac{1}{3};$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_n}{f_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0;$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n}{d_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{3n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{3} = +\infty.$$

Если последовательности $a_n = -n$, $f_n = -n^2$, $d_n = -\sqrt{n}$ бесконечно большие, а последовательности $b_n = \frac{1}{n}$, $c_n = \frac{5}{n}$ бесконечно малые, то следующие пределы легко вычисляются:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (-n) \left(\frac{1}{n} \right) = -1;$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n c_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-n \cdot \frac{5}{n} \right) = -5;$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d_n}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\sqrt{n}}{-n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0;$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n d_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (-n)(-\sqrt{n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} n\sqrt{n} = +\infty;$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f_n b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (-n^2) \left(\frac{1}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} (-n) = -\infty;$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (d_n b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (-\sqrt{n}) \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{\sqrt{n}} \right) = 0;$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f_n c_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (-n^2) \frac{5}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (-5n) = -\infty;$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (c_n d_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{n} (-\sqrt{n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{5}{\sqrt{n}} \right) = 0.$$

Для бесконечно малых последовательностей $a_n = \frac{1}{n}$,

$b_n = \frac{1}{n^2}$, $c_n = \frac{3}{n}$ вычисляются следующие пределы:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} : \frac{1}{n^2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n = +\infty;$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} : \frac{1}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0;$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_n}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{n} : \frac{1}{n} \right) = 3;$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{c_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} : \frac{3}{n} \right) = \frac{1}{3};$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{c_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} : \frac{3}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3n};$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{n} : \frac{1}{n^2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} 3n = +\infty.$$

Пример 16. Найти предел $\lim_{n \rightarrow \infty} (n - \sqrt{n+1} + \sqrt{n} + n^2 \ln n)$.

Выражение под знаком логарифма запишем как $n - (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) + n^2 \ln n$.

Выражение в скобках $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$ имеет

своим пределом 0, т.к. $\frac{1}{\infty} = 0$.

Но тогда $+\infty - 0 + \infty^2 \cdot (+\infty) = +\infty$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Исследовать на ограниченность, монотонность и сходимость.

$$1. a_n = \sqrt{n-2} - \sqrt{n+2}.$$

$$2. a_n = n(\sqrt{n^4 + n} - \sqrt{n^4 - n}).$$

$$3. a_n = \sqrt[3]{n^3 + 2} - \sqrt{n^2 - 2}.$$

$$4. a_n = \sqrt{\frac{n^4 + n^3}{n^3 + 1}} - \sqrt{n^2 - 1}.$$

$$5. a_1 = 2, a_{n+1} = \frac{a_n^2 - 2}{2}.$$

$$6. a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{3}{4}a_n + \frac{1}{a_n}.$$

$$7. a_n = (1 + m)^{\sin(\pi n / 2)}.$$

$$8. a_n = n^{\cos \pi n}.$$

$$9. a_n = \frac{n - (-1)^n n}{2n + 1}.$$

$$10. a_n = 2^{\cos(\pi n / 4)}.$$

$$11. a_n = n^2 \sin \frac{\pi n}{4}.$$

$$12. a_n = \frac{2^n}{n}.$$

$$13. a_n = \sqrt{n^2 + 2n} - n.$$

$$14. a_n = 2^n - 10n.$$

$$15. a_n = \frac{(3n + 1)^2}{3^n}.$$

$$16. a_n = \frac{n^3}{2^n}.$$

$$17. a_n = (n + 1)^{\frac{1}{n}}.$$

$$18. a_n = 2^{n+1} - 3^{n-1}.$$

$$19. a_1 = 1, a_2 = 1, a_{n+2} = \log_{\frac{1}{2}}(2n^2 - 18n + 29).$$

$$20. a_1 = 1, a_2 = 1, a_{n+2} = a_{n+1} + \frac{a_n}{2^n}.$$

$$21. a_1 = 2, a_2 = 3, a_{n+2} = \frac{a_{n+1} + a_n}{2}.$$

$$22. a_n = \frac{3^n}{n^2}.$$

$$23. a_1 = 3, a_{n+1} = \frac{a_n^2 - 2}{2}.$$

$$24. a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + \frac{1}{n+1}.$$

$$25. a_1 = 1, a_2 = 1, a_{n+2} = a_{n+1} + 6a_n.$$

$$26. a_1 = -4, a_2 = 3, a_{n+2} = a_{n+1} + \frac{3}{4}a_n.$$

Найти следующие пределы

$$27. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+2}{n^2+n+3} \sin \frac{1}{n} \right).$$

$$28. \lim_{n \rightarrow \infty} \left((-1)^{n(n+1)/2} \frac{n+2}{n^2+1} \right).$$

$$29. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sin(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) n^{1/4} \right).$$

$$30. \lim_{n \rightarrow \infty} \left((\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}) \cos n \right).$$

31. Предел последовательности равен A , причём $A > 0$. Доказать, что найдётся номер, начиная с которого, все члены последовательности больше нуля.

32. Может ли предел последовательности равняться нулю, если каждый её член отрицателен?

33. Как сформулировать, что число A не является пределом последовательности $\{a_n\}$?

34. Верно ли, что всякая сходящаяся последовательность является ограниченной?

35. Как правильно сформулировать, что последовательность не имеет предела?

36. Последовательность $\{a_n\}$ такова, что $a_1 = A$,

$$a_{n+1} = \frac{1}{3} \left(2a_n + \frac{A}{a_n} \right).$$

Доказать, что предел этой последовательности равен $\sqrt[3]{A}$, и вычислить $\sqrt[3]{4}$ с точностью до 0,001.

37. Доказать, что если отбросить, добавить или заменить конечное число членов сходящейся последовательности, то получится сходящаяся к тому же самому пределу последовательность.

38. Доказать, что если в сходящейся последовательности сделать любую перестановку её членов, то получится сходящаяся к тому же пределу последовательность.

39. Предел последовательности $\{a_n\}$ равен A . Доказать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |A|$.

40. Последовательность $\{|a_n|\}$ сходится. Сходится ли последовательность $\{a_n\}$?

41. Доказать, что во всякой сходящейся последовательности существуют максимальный и минимальный члены этой последовательности.

42. Известно, что $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$. Доказать, что $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k} = A$, а также $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k+1} = A$.

43. Известно, что $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k} = A$ и $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k+1} = A$. Доказать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$.

44. В некоторой окрестности точки A находится бесконечно много членов последовательности $\{a_n\}$. Следует ли отсюда, что число A является пределом этой последовательности?

45. В некоторой окрестности точки A находится бесконечно много членов последовательности $\{a_n\}$. Следует ли отсюда, что некоторое число $B \neq A$ не является пределом этой последовательности?

46. Следует ли, что пределом последовательности является число A , если в любой окрестности точки A находится бесконечно много членов этой последовательности?

47. Следует ли, что некоторое число $B \neq A$ не является пределом этой последовательности, если в любой окрестности точки A находится бесконечно много членов этой последовательности?

48. Следует ли, что последовательность ограничена, если в любой окрестности точки A находится бесконечно много членов этой последовательности?

49. Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = 0$. Следует ли отсюда, что хотя бы одна из последовательностей $\{a_n\}$ или $\{b_n\}$ является сходящейся?

50. Для некоторой последовательности выполняется $a_{n+1} - a_n \rightarrow 0$. Верно ли, что $a_n \rightarrow 0$? Привести примеры.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Данные методические указания позволят студентам глубже освоить такие темы, как функция, предел функции. Знакомство с теорией и выполнение упражнений на монотонность, ограниченность и сходимости последовательностей способствует развитию навыков более глубокого исследования функций, построения их графиков, выявления особенностей функций на границе и внутри области определения. Многие вопросы теории последовательностей тесно переплетаются с теорией рядов, поэтому для постижения последней изучение последовательностей послужит незаменимым подспорьем.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Задачи по математике. Начала анализа: справ. пособие / В.В. Вавилов, И.И. Мельников, С.Н. Олехник, П.И. Пасиченко. Часть 1. – Москва: Наука, 1990. – 608 с. – Текст: непосредственный.
2. Задачи по математике. Начала анализа: справ. пособие / В.В. Вавилов, И.И. Мельников, С.Н. Олехник, П.И. Пасиченко. Часть 2. – Москва: Наука, 1990. – 608 с. – Текст: непосредственный.
3. Смирнов, В.И. Курс высшей математики / В.И. Смирнов. – Санкт-Петербург: БХВ-Петербург, 2008. – 624 с. – Текст: непосредственный.
4. Пискунов, Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления: учеб. пособие / Н.С. Пискунов. – В 2 х т. Т. 1. – Санкт-Петербург, 1996. – 416 с. – Текст: непосредственный.
5. Пискунов, Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления: учеб. пособие / Н.С. Пискунов. – В 2 х т. Т. 2. – Москва: Наука, 1985. – 560 с. – Текст: непосредственный.
6. Шипачев, В.С. Основы высшей математики: учеб. пособие / В.С. Шипачев; под ред. акад. А. Н. Тихонова. – 2-е изд., стер. – Москва: Высшая школа, 1994. – 479 с. – Текст: непосредственный.
7. Шипачев, В.С. Высшая математика: учебник / В.С. Шипачев. – 4-е изд., стер. – Москва: Высшая школа, 1998. – 479 с. – Текст: непосредственный.
8. Шипачев, В.С. Задачник по высшей математике: учеб. пособие / В.С. Шипачев. – Москва: Высшая школа, 2003. – Текст: непосредственный.
9. Математический энциклопедический словарь / гл. ред. Ю.В. Прохоров. – Москва: Советская энциклопедия, 1988. – Текст: непосредственный.
10. Бронштейн, И.Н. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов / И.Н. Бронштейн, К.А. Семендяев. – Москва: Наука, 1986. – Текст: непосредственный.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	3
МОНОТОННОСТЬ	4
ОГРАНИЧЕННОСТЬ	9
СХОДИМОСТЬ	13
Задачи для самостоятельного решения	27
Библиографический список	31

Компьютерная верстка Т.В. Телелева

Темплан ФГБОУВО «ЗГУ» 2022 г. Поз. 15. Подписано в печать 11.02.2022.
Формат 60x84 1/16. Бум. для копир.-мн.ап. Гарнитура *Bookman Old Style*.
Печать плоская. Усл.п.л. 2,0. Уч.-издл. 2,0. Тираж 30 экз. Заказ 3.

663310, Норильск, ул. 50 лет Октября, 7. E-mail: RIO@norvuz.ru

Отпечатано с готового оригинал-макета в отделе ЦИТ ФГБОУВО «ЗГУ»