

Документ подписан простой электронной подписью  
Информация о владельце:  
ФИО: Игнатенко Виталий Иванович  
Должность: Проректор по образовательной деятельности и молодежной политике  
Дата подписания: 02.10.2023 10:09:43  
Уникальный программный ключ:  
a49ae343af5448d45d7e3e1e499659da8109ba78

**Министерство науки и высшего образования РФ**

**Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
«Заполярный государственный университет им. Н. М. Федоровского»**

## **ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ**

**по дисциплине Математический анализ**

Уровень образования: бакалавриат

Кафедра «Физико-математических дисциплин»

Разработчик ФОС:

Доцент, \_\_\_\_\_ Сотников

Оценочные материалы по дисциплине рассмотрены и одобрены на заседании кафедры, протокол № 5 от 17.04.2023 г.

И.о.заведующего кафедрой \_\_\_\_\_ к.э.н., доцент Н.А. Торгашова

Фонд оценочных средств по дисциплине Математический анализ для текущей/промежуточной аттестации разработан в соответствии с Федеральным государственным образовательным стандартом высшего образования по специальности / направлению подготовки 38.03.02 Менеджмент на основе Рабочей программы дисциплины Математический анализ, утвержденной решением ученого совета от г., Положения о формировании Фонда оценочных средств по дисциплине (ФОС), Положения о проведении текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся ЗГУ, Положения о государственной итоговой аттестации (ГИА) выпускников по образовательным программам высшего образования в ЗГУ им. Н.М. Федоровского.

**1. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю), соотнесенных с планируемыми результатами образовательной программы**

Таблица 1. Компетенции и индикаторы их достижения

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения
УК-1: Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.2: Осуществляет критический анализ и синтез информации, полученной из разных источников
ОПК-2: Способен осуществлять сбор, обработку и анализ данных, необходимых для решения поставленных управленческих задач, с использованием современного инструментария и интеллектуальных информационно-аналитических систем;	ОПК-2.2: Применяет основные положения и методы количественного и качественного анализа для принятия управленческих решений

Таблица 2 – Паспорт фонда оценочных средств

Контролируемые разделы (темы) дисциплины	Формируемая компетенция	Наименование оценочного средства	Показатели оценки
Раздел 1. Теория пределов	УК-1.2; ОПК-2.2	Конспект, тест	Есть/нет Полнота ответа
Раздел 2. Производная	УК-1.2; ОПК-2.2	Конспект, тест	Есть/нет Полнота ответа
Раздел 3. Исследование функций и построение	УК-1.2; ОПК-2.2	Конспект, тест	Есть/нет

графиков			Полнота ответа
Раздел 4. Функции многих переменных	УК-1.2; ОПК-2.2	Конспект, тест	Есть/нет Полнота ответа
Раздел 5. Интегральное исчисление	УК-1.2; ОПК-2.2	Конспект, тест	Есть/нет Полнота ответа
Раздел 6. Дифференциальные уравнения	УК-1.2; ОПК-2.2	Конспект, тест	Есть/нет Полнота ответа
Раздел 7. Ряды	УК-1.2; ОПК-2.2	Конспект, тест	Есть/нет Полнота ответа

**1 Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующие процесс формирования компетенций**

Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, представлены в виде технологической карты дисциплины (таблица 3).

Таблица 3 – Технологическая карта

Наименование оценочного средства	Сроки выполнения	Шкала оценивания	Критерии оценивания
<i>Промежуточная аттестация в форме «Экзамена» (для очной и заочной формы обучения)</i>			
Тест итогового контроля	По окончании и второго семестра	от 0 до 5 баллов	Отлично/Хорошо/Удовлетворительно/Неудовлетворительно
ИТОГО:	-	— баллов	-

## **2 Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности характеризующие процесс формирования компетенций в ходе освоения образовательной программы**

### **2.1. Задания для текущего контроля успеваемости**

Типовые оценочные материалы по теме № 1 «Специфика студийной съемки»

Практические задания:

1. Разработать сценарий «Выпуск новостей» (хронометраж 7 минут) по определенной тематике. Провести съемку и монтаж «выпуска». Представить результаты командной работы. Обсуждение и анализ.

Типовые оценочные материалы по теме № 2 «Особенности студийного интервью»

Практические задания:

1. Разработать сценарий «Интервью дня» (хронометраж 10 минут), выбрать героя и ведущего. Подготовиться и провести съемку, смонтировать интервью и представить результаты командной работы. Обсуждение и анализ.

Типовые оценочные материалы по теме № 3 «Ток-шоу как особый вид студийной съемки, имидж ведущего»

Практические задания:

1. Разработать сценарий ток-шоу (хронометраж 15 минут), выбрать «героев» и ведущего, презентовать сценарий ток-шоу на занятии. Обсуждение и анализ.

Типовые оценочные материалы по теме № 4 «Работа над сценарием ток-шоу»

Практические задания:

1. Съемка ток-шоу по согласованному сценарию. Обсуждение и анализ.

Типовые оценочные материалы по теме № 5 «Технология монтажа ток-шоу»

Практические задания:

1. Компьютерный монтаж отснятого командой студентов видеоряда. Создание и презентация 15-минутного ток-шоу. Обсуждение и анализ.

Типовые оценочные материалы по теме № 6 «Технология и механизмы охвата коммерческого медиапродукта»

Практические задания:

1. Компьютерный монтаж отснятого командой студентов видеоряда. Создание и презентация 15-минутного ток-шоу. Обсуждение и анализ.

## **Раздел 1. Теория пределов**

**Задание 1** (*Построение графиков простейших элементарных функций.*)

Постройте графики функций, укажите область определения и множество значений функций:

1. а)  $y = \ln(x + 4)$ ; б)  $y = 1 + e^{2x}$ ; в)  $y = -\frac{4}{x}$ ; г)  $y = \sqrt{x + 2}$ ; д)  $y = x^3$ .

2. а)  $y = |x + 1|$ ; б)  $y = |\ln x|$ ; в)  $y = \ln |x + 5|$ .

**Задание 2.** (Нахождение пределов без применения правила Лопиталья.)

Найдите пределы:

1. а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^5 - 4x^2 + 1}{2x^5 + 3x^3 - x}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 + 3x^2 - 1}{2x^3 - 3x + 1}$ . в)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + x - 3}{x^2 + x - 2}$ ; г)

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 3x - 2}{x^2 - 3x + 2}$ .

2. а)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{5x+1} - 4}{x-3}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+3x} - \sqrt{4-3x}}{7x}$ . в)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{x \sin 3x}$ ; г)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2 4x}{x \sin 8x}$ .

3. а)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{\sin x}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{\sin 2x}}{\operatorname{tg} x}$ . в)  $\lim_{x \rightarrow 2} (7 - 3x)^{\frac{x}{2x-4}}$ ; г)  $\lim_{x \rightarrow 3} (3x - 8)^{\frac{2}{x-3}}$ .

4. а)  $\lim_{x \rightarrow 2} (7 - 3x)^{\frac{x}{2x-4}}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow 3} (3x - 8)^{\frac{2}{x-3}}$ . в)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (2x + 3)[\ln(x + 2) - \ln(x + 3)]$ ;  
г)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (x + 3)[\ln(2x + 7) - \ln(2x - 3)]$ .

**Задание 3.** (Односторонние пределы)

1. Найдите пределы функций при  $x \rightarrow a \pm 0$ ,  $x \rightarrow \pm \infty$ . Сделайте схематический чертёж графика функции.

а)  $y = 2 + 4^{\frac{1}{x-3}}$ ,  $a = 3$ ; б)  $y = 1 + 8^{\frac{1}{x-2}}$ ,  $a = 2$ ; в)  $y = 1 - 3^{\frac{1}{x-4}}$ ,  $a = 4$ .

2. Функция  $f(x)$  задана различными аналитическими выражениями для различных областей изменения независимой переменной. Найдите точки разрыва функции, если они существуют. Сделайте чертёж.

а)  $y = \begin{cases} -x/3, & x \leq 0; \\ \sin x, & 0 < x \leq \pi/2; \\ x - \pi/2, & x > \pi/2. \end{cases}$  б)  $y = \begin{cases} 2x^2, & x \leq 0; \\ \cos x, & 0 < x \leq \pi/2; \\ x - \pi/2, & x > \pi/2. \end{cases}$  в)

$y = \begin{cases} x^2 + 1, & x \leq 0; \\ 1, & 0 < x \leq 2; \\ x - 2, & x > 2. \end{cases}$

3. Найдите точки разрыва функции и определите характер разрыва.

а)  $y = \frac{12x + 6}{x - 1}$ ; б)  $y = \frac{(x + 1)^2}{x(x + 1)}$ ; в)  $y = \frac{\sin 3x}{x}$ .

## Раздел 2. Производная

**Задание 1** Найдите производные  $\frac{dy}{dx}$  заданных функций.

1.  $y = \operatorname{ctg}(3x^2 + 2 \cos x)$ ; 2.  $y = e^{x^2 - 3 \arcsin x}$ ; 3.  $y = \operatorname{arctg} \sqrt{x} - \sqrt{x}$

$$4) . y = \frac{1 + \operatorname{tg} 3x}{1 - \operatorname{tg} 3x}; \quad 5) . y = \sqrt[3]{x^4 + 5x} - \sqrt{(5x-1)^3}; \quad 6) . y = x \arcsin \frac{2x+1}{3};$$

$$7) y = (\cos x)^{2x+1};$$

$$8) y = (\sin x)^{\cos x}. \quad 9) . y = x - \ln(2 + e^x + 2\sqrt{e^{2x} + e^x + 1});$$

$$10) . y = \frac{3x}{\sqrt[3]{2+x}} - 6\sqrt[3]{2+x}; \quad 11) . y = \sin^3 2x;$$

$$12) . y = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}; \quad 13) . y = \frac{2x+9}{(x^2-1)^2}; \quad 14) y = (\operatorname{arctg} x)^{(1/2)\operatorname{In} \operatorname{arctg} x};$$

**Задание 2.** Найдите производные второго порядка от заданных функций.

$$1) y = 3\sqrt{2x+1} + 6x + 1; \quad 2) y = x^2 \ln x. \quad 3) y = \operatorname{arctg} x^2;$$

$$4) y = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}. \quad 5) y = xe^{1/x}; \quad 6) y = \ln \operatorname{ctg} 4x;$$

**Задание 3.** (Производные от функций, заданных параметрически.)

A) Найдите производные  $\frac{dy}{dx}$  заданных функций.

$$1) . x = \frac{3t^2 + 1}{3t^3}, \quad y = \sin\left(\frac{t^3}{3} + t\right)$$

$$2) \quad \begin{cases} x = t + \ln \cos t, \\ y = t - \ln \sin t. \end{cases}$$

$$3) . \begin{cases} x = 2t - \sin 2t, \\ y = \sin^3 t. \end{cases}$$

$$4) \quad \begin{cases} x = t + \frac{\sin 2t}{2}, \\ y = \cos^2 t. \end{cases}$$

B). Найдите производные второго порядка от функций, заданных параметрически.

$$1) \quad \begin{cases} x = 1 + \ln \cos t, \\ y = 1 - \ln \sin t. \end{cases}$$

$$2) \quad \begin{cases} x = t^5 + 2t, \\ y = t^3 + 8t - 1. \end{cases}$$

$$3) \quad \begin{cases} x = \arcsin(t^2 - 1), \\ y = \arccos 2t. \end{cases}$$

**Задание 4.** (Дифференциал функции.)

Найдите дифференциал функции

$$1) y = 4\sqrt{7x+6}. \quad 2) y = (x^2 + 1)^3. \quad 3) y = \ln(5x + 1). \quad 4) y = e^{3x}$$

Вычислите приближённо, заменяя приращение функции её дифференциалом

$$5) \ln 1,01; \quad 6) e^{0,2}.$$

**Задание 5.**

1) Составьте уравнения касательной и нормали к кривой  $y = \sqrt{1-4x}$  в точке с абсциссой  $x_0 = -2$ .

2) Напишите уравнение касательной к графику функции  $y = \operatorname{arctg} x$  в точке с абсциссой  $x_0 = \sqrt{3}$ .

3) Напишите уравнение нормали к графику функции  $y = 2^x$  в точке с абсциссой  $x_0 = 2$ .

$$1) \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 3x^3 + 8}{x^5 - x + 20}; \quad 2) \quad \lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}; \quad 3) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x^3}; \quad 4) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^5};$$

**Раздел 3. Исследование функций и построение графиков**

**Задание 1.** (Экстремумы функций)

**Задачи 1-4. Нахождение экстремумов функций**

1) Исследовать на экстремум функцию  $y = -\frac{x^3}{(x+1)^2}$ .

2) Исследовать на экстремум функцию  $y = x^3 - 4x^2$ .

3) Найдите точки локального минимума функции  $y = (x-5)e^x$ .

4) Найдите точки локального максимума функции  $y = x^3 - 4x^2$ .

**Задачи 5-7. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции  $f(x)$  на отрезке  $[a, b]$ :**

5)  $f(x) = \frac{x-5}{x^2+11}$ ;  $[-3; 7]$ ; 6)  $f(x) = \frac{x+6}{x^2+13}$ ;  $[-5; 5]$ ; 7)  $f(x) = \frac{x}{2} - \sin x$ ;  $[-2\pi; -3\pi/2]$ ;

**Задачи 8-9. Текстовые задачи на отыскание наибольшего или наименьшего значения заданной величины**

8) Требуется изготовить открытый цилиндрический бак данного объема  $V$ , причём стоимость квадратного метра материала, идущего на изготовление бака, равна  $p_1$  рублей, а стоимость квадратного метра материала идущего на стенки, равна  $p_2$  рублей. При каком отношении радиуса дна к высоте бака затраты на материалы будут наименьшими?

9) Из полосы жести шириной 11 см требуется сделать открытый сверху жёлоб, поперечное сечение которого имеет форму равнобокой трапеции. Дно жёлоба должно иметь ширину 7 см. Какова должна быть ширина жёлоба наверху, чтобы он вмещал наибольшее количество воды?

**Задание 2. (Построение графиков функций.)**

Постройте графики функций::

1)  $y = -\frac{x^3}{(x+2)^2}$ ; 2)  $y = \frac{x}{x^2+1}$ ; 3)  $y = \frac{e^x}{x}$ ; 4)  $y = x - \ln x$ .

**Раздел 4. Функции многих переменных**

**Задание 1. (Нахождение частных производных)**

А) а) Дана функция  $z = \sin^2(3x - 4y)$ . Вычислите  $4\frac{\partial z}{\partial x} + 3\frac{\partial z}{\partial y}$ .

б) Дана функция  $z = \frac{xy}{x+y}$ . Вычислите  $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} - z$ .

в) Дана функция  $z = \ln(x^2 - y^2)$ . Вычислите  $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}$ .

Б) Найдите значения производных заданных функций в указанных точках.

а) Для функции  $z = 3x^2 e^{-y^2}$  найдите значение  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$  в точке  $(1, 0)$ .

б) Для функции  $z = (x^2 + 4x) e^{2y}$  найдите значение  $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$  в точке  $(1, 0)$ .

в) Для функции  $u = 2x + 4y^2 + xyz$  найдите значение  $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$  в точке  $(1, 1, 1)$ .

В) Частные производные сложных и неявных функций.

Найдите значения производных заданных функций в точке  $u = 0, v = 0$ .

- а) Найдите значение  $\frac{\partial z}{\partial u}$  функции  $z = 2e^{x/y^2}$ ,  $x = 3u + v$ ,  $y = 1 + \sin uv$ .
- б) Найдите значение  $\frac{\partial z}{\partial v}$  функции  $z = 2e^{x/y^2}$ ,  $x = 3u + v$ ,  $y = 1 + \sin uv$ .
- в) Найдите значение  $\frac{\partial z}{\partial u}$  функции  $z = 2x^2 - \ln(x + 2y) + y^2$ ,  $x = u - v + 1$ ,

$$y = u + v.$$

Г) Найдите указанные производные функций заданных неявно:

- а).  $x^3 + 3x - 2xy + xuz - z^2 = 4$ ,  $z = z(x, y)$ . Найдите  $z'_x$ ,  $z'_y$
- б).  $\sin(x^2 + y) - x = y$ ,  $y = y(x)$ . Найдите  $y'(x)$ ,  $y''(x)$ .
- в).  $15x^3 + 16y^2 - 16xy + z + z^2 = 1$ ,  $z = z(x, y)$ . Найдите  $z''_{x^2}$ ,  $z''_{y^2}$ ,  $z''_{xy}$

**Задание 2.** (Экстремумы ФНП. Наиб. и наим-е значения функций нескольких переменных в замкнутой области.)

1. Найдите экстремумы функций.

а)  $z = 6xy - 9x^2 - 9y^2 + 4x + 4y$ ; б)  $z = 4x^2 + 4xy - y^2 - 8y$ ; в)  $z = x^2 + 2xy + 4x - y^2$ .

2. Исследуйте квадратичные формы на знакоопределенность:

а)  $x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3 + 4x_3^2$ , б)  $4x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 + 2\sqrt{3}x_2x_3$ ,

в)  $2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 8x_1x_2 + 8x_1x_3 - 8x_2x_3$

3. Найдите экстремумы функций: а)  $u = x^2 + 2y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z + 6$ .

б)  $u = 2x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 2x + 4y - 6z + 6$ , в)  $u = 2x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 2x + 4xy - 6z + 6$ .

4. Найдите наибольшее и наименьшее значения функций в заданной области.

а)  $z = 6xy - 9x^2 - 9y^2 + 4x + 4y$  в прямоугольнике  $0 \leq x \leq 1$ ,  $0 \leq y \leq 2$ ;

б)  $z = 4x^2 + 4xy - y^2 - 8y$  в треугольнике, ограниченном прямыми  $y = 2x$ ,  $y = 2$ ,  $x = 0$ ;

в)  $z = x^2 + 2xy + 4x - y^2$  в треугольнике, ограниченном прямыми  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $x + y + 2 = 0$ .

**Задание 3.** (Условный экстремум.)

1. Найдите условные экстремумы функции  $z = z(x, y)$ :

а)  $z = 6xy - 9x^2 - 9y^2 + 4x + 4y$ , если  $x + 2y = 1$ ; б)  $z = 4x^2 + 4xy - y^2 - 8y$ , если  $2x = y$ ;

в)  $z = x^2 + 2xy + 4x - y^2$ , если  $x - y = 2$ .

2. Требуется изготовить открытый цилиндрический бак данного объема  $V$ , причём стоимость квадратного метра материала, идущего на изготовление дна бака, равна  $p_1$  рублей, а стоимость квадратного метра материала идущего на стенки, равна  $p_2$  рублей. При каком отношении радиуса дна к высоте бака затраты на материалы будут наименьшими?

**Задание 4.** (производная по направлению, градиент)

1. Найти производную скалярного поля  $u = (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}$  в точке  $M(1,1,1)$  по направлению вектора  $\vec{l} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ .

2. Найти производную скалярного поля

$u = x + \ln(z^2 + y^2)$  в точке  $M(2,1,1)$  по направлению вектора

3. Найти градиент скалярного поля  $u = (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}$  в точке  $M(-1,2,1)$ .

4. Найти градиент скалярного поля  $u = x + \ln(z^2 + y^2)$  в точке  $M(-2,1,-1)$

**Раздел 5. Интегральное исчисление**



**Задание 1.** (Использование таблицы интегралов и соотношения)

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$$

Найдите интегралы:

1.  $\int \frac{dx}{4+(3x+1)^2}$ .    2.  $\int e^{7x-1} dx$ .    3.  $\int \sin(13x+4) dx$ .  
4.  $\int \frac{dx}{\sin^2(5x+3)}$ .    5.  $\int \frac{dx}{4x^2+1}$ .    6.  $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2+4}}$ .    7.  $\int \frac{dx}{\sqrt{4-(3x+5)^2}}$ .

**Задание 2.** (Подведение под знак дифференциала. (замена переменной))

Найдите интегралы:

1.  $\int \frac{\arctg x}{1+x^2} dx$ .    2.  $\int \frac{\operatorname{tg}^2 x}{\cos^2 x} dx$ .    3.  $\int \frac{\sqrt{2+\ln x}}{x} dx$ .  
4.  $\int \frac{x^2 \arctg x}{1+x^2} dx$ .    5.  $\int \frac{\sin x}{\sqrt[3]{3+2\cos x}} dx$ .    6.  $\int \frac{3^{\arctg x}}{1+x^2} dx$ .

**Задание 3.** (Интегрирование по частям.)

Найдите интегралы:

1.  $\int xe^{-2x} dx$ .    2.  $\int (5x^2 - 2x + 1)e^x dx$ .    3.  $\int e^{3x} \sin x dx$ .  
4.  $\int (x^2 - 1)e^{-x} dx$ .    5.  $\int x \ln^2 x dx$ .    6.  $\int x^2 e^{-x/2} dx$ .

**Задание 4.** (Интегрирование рациональных и иррациональных выражений, содержащих квадратный трёхчлен.)

Найдите интегралы:

1.  $\int \frac{dx}{x^2 - 7x + 10}$ .    2.  $\int \frac{8x-11}{\sqrt{5x+2x-x^2}} dx$ .    3.  $\int \frac{(3-x) dx}{\sqrt{3-2x-x^2}}$ .  
4.  $\int \frac{(3x-1) dx}{\sqrt{2x^2+2x+1}}$ .    5.  $\int \frac{(x-5) dx}{\sqrt{3x^2-6x-1}}$ .    6.  $\int \frac{(x+2) dx}{x^2+2x+5}$ .

**Задание 5.** (Интегрирование рациональных дробей.)

Найдите интегралы:

1.  $\int \frac{x^3 + 4x^2 + 5x + 3}{x^2 + 4x + 5} dx$     2.  $\int \frac{(7x^2 - 1) dx}{(x^2 + 5)(x^2 - 1)}$ .    3.  $\int \frac{x^3 - 6}{x^4 + 6x^2 + 8} dx$ .  
4.  $\int \frac{x^2 + 2x + 4}{x^4 - 5x^2 + 4} dx$ .    4.  $\int \frac{2x^2 - x - 1}{x^3 - x^2 - 6x} dx$ .    6.  $\int \frac{x^4 + 2x - 2}{x^4 - 1} dx$ .

**Задание 6.** (Интегрирование иррациональных выражений.)

Найдите интегралы:

1.  $\int \frac{\sqrt{x} dx}{1+\sqrt{x}}$ .    2.  $\int \frac{1}{(1-x)^2} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx$ .    3.  $\int \frac{2\sqrt[4]{x}+1}{\sqrt[4]{x^3}(\sqrt{x}+4)} dx$ .  
4.  $\int \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt[6]{x}+1)}{\sqrt[3]{x^{7/2}}} dx$ .    5.  $\int \sqrt{\frac{3+2x}{x-2}} dx$ .    6.  $\int \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{x-1}+1} dx$ .

**Задание 7. (Интегрирование тригонометрических функций.)**

Найдите интегралы:

$$1. \int \frac{dx}{2 \sin x - 3 \cos x}. \quad 2. \int \frac{dx}{3 + 5 \cos 2x}. \quad 3. \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^4 x}.$$

$$4. \int \sin^3 x \cos^2 x dx. \quad 5. \int \sin^4 x \cos^4 x dx.$$

**Задание 8. (Интегралы от функций вида  $f(e^x)$ )**

Найдите интегралы:

$$1. \int \frac{e^x dx}{(2 + e^{-x} + e^x)^2}. \quad 2. \int \frac{e^x - 1}{3e^{2x} + 1} dx. \quad 3. \int \frac{dx}{\sqrt{e^x + 4}}.$$

$$4. \int \frac{(e^{x/2} + 2)e^{x/2}}{e^x + 4e^{x/2} + 1} dx. \quad 5. \int \frac{e^x dx}{e^x + e^{-x}}.$$

**Задание 9 (Вычисление определённых интегралов.)**

Найдите интегралы:

$$1. \int_0^{13} \frac{x+1}{\sqrt[3]{2x+1}} dx. \quad 2. \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^{2x} dx}{e^x - e^{-x}}. \quad 3. \int_0^{\sqrt{3}} x \operatorname{arctg} x dx.$$

$$4. \int_3^8 \frac{\sqrt{x+1} + 1}{\sqrt{x+1} - 1} dx. \quad 5. \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2 - \cos x}. \quad 6. \int_0^2 x \ln(x+3) dx.$$

$$7. \int_0^{\pi/2} \sin x \cos^2 x dx. \quad 8. \int_4^9 \frac{x-1}{\sqrt{x+1}} dx. \quad 9. \int_{\sqrt{2}}^1 \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2} dx. \quad 10. \int_{-1}^0 (x+1)e^{-2x} dx.$$

**Задание 10. (Несобственные интегралы.)**

Исследуйте сходимость интегралов.

$$1. \int_e^{\infty} \frac{dx}{x \ln x}. \quad 2. \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\sin^2 x}. \quad 3. \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+x^8}} dx.$$

$$4. \int_0^{+\infty} \frac{x^2 + 2}{x^3 + 4x^2 + x} dx. \quad 5. \int_0^1 \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{1-x}} dx. \quad 6. \int_1^3 \frac{x + \sqrt[3]{x}}{\sqrt{x-1}} dx.$$

$$7. \int_3^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-3)^2}}. \quad 8. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 4x + 5}. \quad 9. \int_1^e \frac{dx}{x \sqrt{\ln x}}.$$

$$10. \int_0^{+\infty} x e^x dx. \quad 11. \int_0^{2/\pi} \frac{\sin(1/x)}{x^2} dx. \quad 12. \int_2^{+\infty} \frac{\ln x}{x} dx.$$

$$13. \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+4x^2}} dx. \quad 14. \int_2^{\infty} \frac{dx}{x(\ln(x+1))^3}. \quad 15. \int_0^{+\infty} x e^{-x} dx.$$

**Задание 11. (Нахождение площадей)**

1. Найдите площадь плоской фигуры, ограниченной кривыми  $y_1 = \sin x + 2$ ,  $y_2 = -1$ ,  $x = 0$ ,  $x = \pi$ .

2. Найдите площадь плоской фигуры, ограниченной кривыми  $y_1 = \frac{1}{\sin^2 x}$ ,  $y_2 = 0$ ,  $x = 0$ ,

$$x = \frac{\pi}{4}.$$

4. Найдите площадь фигуры, ограниченной параболой  $y = x^2 - 4$  и прямой  $x - y + 8 = 0$ .

## Раздел 6. Дифференциальные уравнения

**Задание 1.** (Дифференциальные уравнения 1-го порядка.)

Задачи 1– 6. Найдите частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям:

1.  $(x + 1)y dx + x(y - 1) dy = 0$ ;  $y(1) = 2$ .

2.  $(\sqrt{xy} - x) dy + y dx = 0$ ;  $y(1) =$

3.  $y' + y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}$ ;  $y(0) = 0$ .

4.  $y' + 4xy = 2xe^{-x^2} y^{1/2}$ ;  $y(0) =$

5.  $xy' = y \ln \frac{y}{x}$ ;  $y(1) =$

**Задание 2.** (Дифференциальные уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка.)

1.  $y''' = x^2 + 4$ .

2.  $y'' + \frac{1}{x} y' = 0$ .

3.  $y'' + y' + yx = \sin x \cos x$ .

4.  $y^3 y'' = 1$ ,  $y > 0$ .

**Задание 3.** (Однородные линейные дифференциальные уравнения высших порядков.)

1.  $y'' - 7y' + 12y = 0$ .

2.  $y'' - 4y' + 5y = 0$ .

3.  $y'' + 2y' + y = 0$ .

4.  $y''' - 4y'' = 0$ .

5.  $y'' + 4y = 0$ .

6.  $y'' - 5y' + 6y = 0$ .

**Задание 4.** (Неоднородные линейные дифференциальные уравнения высших порядков.)

1.  $y'' - 7y' + 12y = xe^{3x}$ .

2.  $y'' - 4y' + 5y = 2xe^x$ .

3.  $y'' + 2y' + y = 3 \sin x$ .

4.  $y''' - 4y'' = 3$ .

5.  $y'' + 4y = \cos 2x$ .

6.  $y'' - 5y' + 6y = x^2 - x$ .

## Раздел 7. Ряды

**Задание 1.** (Сходимость числовых рядов.)

1. Исследуйте сходимость числовых рядов с помощью признаков сравнения:

а)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 4n - 1}{3n^3 + 4}$ ; б)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + 3}{4n^4 + \sqrt{n} + 1}$ ; в)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n + \sqrt{n} + 3}{n \sqrt{n}}$ ;

г)  $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n^2 + 1}$ .

д)  $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left( 1 - \frac{3}{n^2} \right)$ ; е)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}(1/\sqrt{n})}{n^2 + n - 1}$ .

2. Исследуйте сходимость рядов с помощью признаков Даламбера и Коши:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{2^n}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5+6n+3}{3^{n-1}(2n+7)}; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n/2}}{3^{5n+1}(n^2+3)};$$

$$\text{г) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(n+1)!}$$

$$\text{д) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}; \quad \text{е) } \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}; \quad \text{ж) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{n!}.$$

3. Исследуйте сходимость рядов с помощью интегрального признака Коши:

$$\text{а) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}; \quad \text{б) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n (\ln n)^2}; \quad \text{в) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n+1) \sqrt{\ln n}}.$$

Задание 2. Исследуйте сходимость (абсолютную и условную) знакопеременных рядов.:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n^2+4n-1}{3n^3+4}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+3}{4n^4+\sqrt{n}+1}; \quad \text{в) } \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n \ln n}$$

$$\text{г) } \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{3^n}{(n+1)!}$$

Задание 3. (Функциональные и степенные ряды.)

Найдите область сходимости функциональных рядов:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{x+3}}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^{2x^2-3x+2}}; \quad \text{в) } \sum_{n=0}^{\infty} (2x+3)^n. \quad \text{г) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x^2-6x+12)^n}{4^n(n^2+1)}$$

$$\text{д) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+x)^n}{n^n} \quad \text{е) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(\sqrt[3]{n^2} + \sqrt{n} + 1\right)^{2x+1}} \quad \text{ж) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n2^n}{n+1} \frac{1}{(3x^2+8x+6)^n}$$

Задание 5 Найдите радиус сходимости, интервал сходимости и область сходимости степенных рядов:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n(n+1)} x^n; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{\sqrt{n}+1} (x+3)^n; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{3^n(n+1)(n+2)}.$$

$$\text{е) } \sum_{1}^{\infty} \frac{(x-3)^{2n}}{(n+1) \ln(n+1)} \quad \text{ж) } \sum_{2}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n \cdot 3^n \ln n} \quad \text{з) } \sum_{1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^2}$$

Задание 6. (Разложение функций в степенные ряды.)

1 Найдите несколько первых (отличных от 0) членов разложения в ряд по степеням  $x$  функций.

$$\text{а) } \operatorname{arctg}^2 x \quad \text{б) } \ln \cos x \quad \text{в) } \ln^2(1-x) \sin^3 x$$

2. Разложите заданные функции в степенные ряды (по степеням  $x$ ). Укажите интервал сходимости полученных рядов.

$$\text{а) } f(x) = x \ln(1+x^2); \quad \text{б) } f(x) = x \operatorname{arctg} x; \quad \text{в) } f(x) = x \sin x^2;$$

$$\text{г) } f(x) = \frac{x}{4+x^2}; \quad \text{д) } f(x) = \frac{x+4}{(x-1)(x+5)}. \quad \text{е) } \ln(1-x-6x^2)$$

ж)  $\frac{x^2}{\sqrt{4-5x}}$       з)  $\frac{5x-5}{x^2-x-6}$       и)  $\ln(4+3x)$       к)  $\sqrt{16-5x}$

**2.2 Задания для промежуточной аттестации (экзамен по дисциплине)**

**Тесты**