Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Норильский государственный индустриальный институт»
Политехнический колледж

МАТЕМАТИКА

Методические указания
и контрольные задания
для студентов образовательных учреждений
среднего профессионального образования
по специальности:
13.02.01 Тепловые электрические станции
2 КУРС

2020

Методические указания учебной дисциплины «Математика» составлены в соответствии с рабочей программой по дисциплине "Математика" для специальности **13.02.01 Тепловые электрические станции**
2 КУРС

Организация-разработчик: Политехнический колледж ФГБОУ ВО «Норильский государственный индустриальный институт».

Разработчик:
Багомедова Уздият Магомедсаидовна, преподаватель первой квалификационной категории ФГБОУ ВО "НГИИ"

Рассмотрена на заседании предметной комиссии естественнонаучных дисциплин

Председатель комиссии М. В. Олейник

Утверждена методическим советом политехнического колледжа ФГБОУ ВО «Норильский государственный индустриальный институт».

Протокол заседания методического совета № --------- от «--------» ------- 20__г.

Зам. Директора по УР ------------------------ С. П. Блинова

УВАЖАЕМЫЙ СТУДЕНТ!

Методические указания по дисциплине «МАТЕМАТИКА» для выполнения практических работ созданы Вам в помощь для работы на занятиях, подготовки к ним, правильного составления проектов документов.

Приступая к выполнению практической работы, Вы должны внимательно прочитать цель и задачи занятия, ознакомиться с требованиями к уровню Вашей подготовки в соответствии с федеральными государственными образовательными стандартами третьего поколения, краткими теоретическими и учебно-методическими материалами по теме практической работы, ответить на вопросы для закрепления теоретического материала.

Наличие положительной оценки по практическим работам необходимо для получения зачета по дисциплине «МАТЕМАТИКА» или допуска к экзамену, поэтому в случае отсутствия на уроке по любой причине или получения неудовлетворительной оценки за практическую работу Вы должны найти время для ее выполнения или пересдачи.

Внимание! Если в процессе подготовки к практическим работам или при решении задач у Вас возникают вопросы, разрешить которые самостоятельно не удается, необходимо обратиться к преподавателю для получения разъяснений или указаний в дни проведения дополнительных занятий.

Время проведения дополнительных занятий можно узнать у преподавателя или посмотреть на двери его кабинета.

Желаем Вам успехов!

Требования к оформлению и выполнению практических работ.

Методические указания по дисциплине «Математика» предназначены для студентов дневного отделения политехнического колледжа специальности **13.02.01 Тепловые электрические станции** 2 КУРС

Содержание работ полностью соответствует действующей программы по математике.

Практические занятия рассчитаны на 20 часов

При проведении практических занятий:

- использовать учебные пособия, наглядные средства обучения;
- проводить несложные дедуктивные рассуждения;
- обосновывать шаги решения задач;
- формулировать определения математических понятий;
- пользоваться математической терминологией и символикой;
- письменно оформлять решения задач
- пользоваться калькулятором;
- самостоятельно изучать учебный материал.

СОДЕРЖАНИЕ

	Темы практических занятий	часы
1	Вычисление пределов. Раскрытие неопределенности вида $\left[\frac{0}{0}\right]$.Раскрытие неопределенности вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Первый и второй замечательные пределы. Исследование функций на непрерывность. Вычисление производных сложной функции.	**2**
2	Нахождение неопределенных интегралов. Вычисление определенных интегралов	**2**
3	Действия над комплексными числами в алгебраическом и тригонометрическом виде	**2**
4	Определение сходимости рядов по признаку Даламбера. Определение сходимости знакопеременных рядов. Разложение функций в ряд Маклорена	**2**
5	Решение обыкновенных дифференциальных уравнений первого и второго порядка	**2**
6	Вычисление интегралов по формулам прямоугольников, трапеций и формуле Симпсона. Оценка погрешности.	**2**
7	Численное дифференцирование. Формулы приближенного дифференцирования, основанные на интерполяционных формулах Ньютона. Погрешность в определении производной	**2**
8	Построение интегральной кривой. Метод Эйлера. Нахождение значения функции с использованием метода Эйлера.	**2**
9	Решение простейших задач на определение вероятности с использованием теоремы сложения вероятностей. Формула полной вероятности.	**2**
10	Случайная величина. Дискретная и непрерывная случайная величины. Закон распределения случайной величины Числовые характеристики дискретной случайной величины	**2**

Практическая работа №1.
«Вычисление пределов функции в точке.
Вычисление пределов функций с использованием первого и второго замечательных пределов. Исследование функций на непрерывность.
Нахождение производных по алгоритму. Вычисление производной сложных функций»**.**

Цель работы:
уметь:

- вычислять пределы функций с использованием первого и второго замечательных пределов;
- вычислять несложные пределы элементарных функций;
- устанавливать непрерывность функции, точки разрыва функции;
- находить производную сложной функции;
- находить дифференциал функции;
- находить вторую производную и производную высших порядков;
- дифференцировать элементарные функции.

Необходимые для выполнения работы знания:
студент должен:
знать:

- формулы первого и второго замечательных пределов;
- определение непрерывной функции (в точке, на промежутке);
- свойства непрерывных функций;
- типы точек разрыва функции;
- систему и определение производной, второй производной и производных высших порядков;
- табличные решения производных элементарных функций, в том числе обратных тригонометрических функций;
- правила дифференцирования функций.

Сведения из теории:

1. Замечательные пределы

Некоторые пределы невозможно найти, используя только теоремы о пределах. Пусть, например, требуется найти

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}.$$

Непосредственная подстановка вместо аргумента его предела дает неопределенность вида 0/0. Невозможно также преобразовать числитель и знаменатель таким образом, чтобы выделить общий множитель, предел которого равен нулю.
Существуют формулы, которые позволяют вычислять пределы. Доказательство их справедливости приводится в подробных курсах математического анализа.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \text{ или } \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1.$$

Этот предел называют *первым замечательным пределом*.

Если $x\to\infty$, то имеет место соотношение

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e \approx 2{,}7182....,$$

которое называется *вторым замечательным пределом*.

Пример 1.

Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x}$.

Решение:

используем: элементарные преобразования дробей (помножим числитель и знаменатель на одно число); теоремы о пределах (числовой множитель можно вынести за знак предела):

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin 2x}{2x}=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}.$$

Учитывая, что если $x\to 0$, то и $2x\to 0$, получим

$$2\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}=2\lim_{2x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}=2\lim_{a\to 0}\frac{\sin a}{a}=2\cdot 1=2.$$

Пример 2.

Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^x$.

Решение:

разделив числитель и знаменатель на *x*, получим

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}=\frac{1}{e}.$$

2. Непрерывность функции, точки разрыва

Непрерывность функции

Функция *f(x)* называется непрерывной в точке *x=a*, если предел при *x*⟶*a* равен значению функции при *x=a*, т.е. $\lim\limits_{x\to a}(f(x))=f(a)$.

Функцию *y=f(x)* называют непрерывной в точке *x=a*, если она в этой точке определена и бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции, т.е.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta f(x)=0.$$

Согласно данным определениям непрерывность функции *f(x)* в точке *x=a* означает одновременную выполнимость следующих условий:

1) функция *f(x)* должна быть определена в точке *x=a;*

2) у функции *f(x)* должен существовать предел в точке $x=a$;
3) предел функции *f(x)* в точке $x=a$ совпадает со значением функции в этой точке.

Пример 3.
Исследовать на непрерывность функцию $y=x^2-2$ в точке $x=3$.
Решение:
для исследования используем определение: $\lim\limits_{x\to 3}(x^2-2)=3^2-2=7$.
Найдем f(3), f(3)=7.
Получаем: $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=f(3)$, следовательно, функция $y=x^2-2$ непрерывна в точке $x=3$.

Точки разрыва функции.
Если условие непрерывности функции в точке $x=a$ нарушено, то такую точку называют точкой разрыва функции.
Если функция $y=f(x)$ при $x=a$ имеет разрыв, то для выяснения характера разрыва следует найти предел функции *f(x)* при $x\to a$ слева и справа.
В зависимости от характера поведения функции в окрестности точки разрыва различают два основных вида разрывов:
- разрыв I рода - в этом случае существуют конечные пределы $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$;
- разрыв II рода - в этом случае хотя бы один из пределов слева $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ или справа $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ не существует или бесконечен.

Пример 4.
Для заданной функции найти точку разрыва и исследовать ее характер:
$y=\frac{x}{x-3}$.
Решение:
данная функция определена для всех x, кроме $x=3$.
Т.к. эта функция является элементарной, то она непрерывна в каждой точке своей области определения, т.о. $x=3$ - единственная точка разрыва.
Для исследования характера разрыва найдем пределы слева и справа:

$$\lim_{x\to 3-0}\frac{x}{x-3}=\frac{3}{-0}=-\infty;\ \lim_{x\to 3+0}\frac{x}{x-3}=\frac{3}{+0}=+\infty.$$

Следовательно, $y=\frac{x}{x-3}$ в точке $x=3$ имеет бесконечный разрыв, т.е. $x=3$ – точка разрыва II рода.

3. Вычисление производных высших порядков

Табличные значения производных элементарных функций, тригонометрических и обратных тригонометрических функций.

$c' = 0$ $(x^n)' = nx^{n-1}$ $(kx+b)' = k$ $(e^x)' = e^x$ $(a^x)' = a^x \ln a$ $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$	$(\sin x)' = \cos x$ $(\cos x)' = -\sin x$ $(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ $(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$ $(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$

Правила вычисления производных:

$(x \pm y)' = x' \pm y'$

$(xy)' = x'y + xy'$

$\left(\frac{x}{y}\right)' = \frac{x'y - xy'}{y^2}$

Производная сложной функции.

Пусть функция $y = f(x)$, $x \in (a;b)$, имеет производную в точке $x_0 \in (a;b)$, а функция $z = f(x)$ имеет производную в точке $y_0 = g(x_0)$. Тогда сложная функция $z(x) = f(g(x))$ имеет производную в точке x_0, которая вычисляется по формуле

$$z'(x_0) = (f(g(x_0))' = f'(y_0) * g'(x_0)$$

Пример 5.

Вычислите производную функции $y = (x^2 + 3x + 10)^2$.

Решение:

$$y = (x^2 + 3x + 10)^2$$

$$g(x) = x^2 + 3x + 10$$

$$f(x) = (g(x))^2$$

$$f'(x) = ((g(x))^2)' = 2g(x) \cdot (g(x))'$$

$$y' = 2(x^2 + 3x + 10) * (x^2 + 3x + 10)' = 2(x^2 + 3x + 10)(2x + 3).$$

План работы:

№1. Вычисление пределов функций с использованием первого и второго замечательных пределов:

1 вариант	**2 вариант**	**3 вариант**
1) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{x}$	1) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{x}{x+1}\right)^x$	

		1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{3x}\right)$
4 вариант 1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 6x}{\sin 2x}$	**5 вариант** 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x}\right)^{2x}$	**6 вариант** 1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin^2 3x}{4x^2}\right)$

№2. Вычислите:

1 вариант 2) Исследуйте на непрерывность функцию $y=x^2+4x+3$ в точке $x=2$ 3) Найдите точки разрыва и исследуйте их характер для функции (постройте схематично график функции): $y=\frac{5}{2x-1}$	**2 вариант** 2) Исследуйте на непрерывность функцию $y=x^2-3x$ в точке $x=-4$ 3) Найдите точки разрыва и исследуйте их характер для функции (постройте схематично график функции): $y=\frac{1}{x^2}$	**3 вариант** 2) Исследуйте на непрерывность функцию $y=x^3-3$ в точке $x=-1$ 3) Найдите точки разрыва и исследуйте их характер для функции (постройте схематично график функции): $y=\frac{3}{x^2-2x+1}$
4 вариант 2) Исследуйте на непрерывность функцию $y=x^2+x$ в точке $x=-2$ 3) Найдите точки разрыва и исследуйте их характер для функции (постройте схематично график функции): $y=\frac{x-1}{x^2-3x-10}$	**5 вариант** 2)Исследуйте на непрерывность функцию $y=-2x^2+x$ в точке $x=-5$ 3)Найдите точки разрыва и исследуйте их характер для функции (постройте схематично график функции): $y=-\frac{6}{x}$	**6 вариант** 2)Исследуйте на непрерывность функцию $y=\frac{1}{2}(-2x^2+x)$ в точке $x=-1$ 3)Найдите точки разрыва и исследуйте их характер для функции (постройте схематично график функции): $y=\frac{4}{4-x^2}$

№3. Вычислите значение «сложной» производной в указанной точке:

1 вариант 4) $f(x)=\ln tgx$ 5) $f(x)=e^{\sin x};\quad f'(0).$	**2 вариант** 4) $f(x)=\ln ctgx$ 5) $f(x)=e^{\cos 2x}; f'(\pi/4).$	**3 вариант** 4) $f(x)=\ln\cos x$ 5) $f(x)=e^{-2\sin x};\quad f'(0).$
4 вариант 4) $f(x)=tg^2 3x$ 5) $f(x)=e^{\sin 2x}; f'(0).$	**5 вариант** 4) $f(x)=\ln tg\, 2x$ 5) $f(x)=-2e^{\sin 2x}; f'(\pi/4).$	**6 вариант** 4) $f(x)=\cos^3 x$ 5) $f(x)=\ln\sqrt{\sin x}; f'(\pi/4).$

Контрольные вопросы:

1. Что называется первым замечательным пределом?
2. Что называется вторым замечательным пределом?
3. Дайте определение непрерывности функции в точке.
4. Дайте определение точке разрыва, перечислите виды точек разрыва.
5. Приведите примеры производных некоторых табличных функций.
6. Приведите примеры производных тригонометрических и обратных тригонометрических функций
7. Сформулируйте правила вычисления производных.
8. Что называется второй производной данной функции?

Литература: [4, с. 191-194], [1, §31, с.297-301]

Практическая работа №2

«Нахождение неопределенных интегралов. Вычисление определенных интегралов»

Цель работы:

уметь:

- владеть навыками нахождения неопределенного интеграла методом непосредственного интегрирования.

- применять основные свойства неопределенных интегралов при решении задач.

Необходимые для выполнения работы знания:

Студент должен:

знать:

– правила вычисления неопределенных интегралов;
– правила вычисления интегралов методом подстановки;
– правила вычисления интегралов методом интегрирования по частям
– таблицу интегралов.

Сведения из теории:

Функции $F(x)$ называется первообразной для функции $f(x)$в промежутке
$a \le x \le b$, если в любой точке этого промежутка ее производная равна $f(x)$:
$F'(x) = f(x)\ dF(x) = f(x)dx, a \le x \le b.$

Отыскание первообразной функции по заданной ее производной $f(x)$ или по дифференциалу $f(x)dx$ есть действие, обратное дифференцированию, - интегрирование.

Основные свойства неопределенного интеграла:

−Неопределенный интеграл от дифференциала функции равен этой функции плюс неопределенная постоянная:

$$\int f(x)dx = F(x) = C$$

−Дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению, а производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции:

d$\int f(x)dx$ = f(x)dx, $(\int f(x)dx)'$= f(x)

−Неопределенный интеграл алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме неопределенных интегралов этих функций:
$\int[f(x) + \varphi(x)]$dx = $\int f(x)dx + \int \varphi(x)$dx

−Постоянный множитель подынтегрального выражения можно выносить за знак неопределенного интеграла:

$$\int af(x)\,dx = a\int f(x)dx$$

−Если $\int f(x)dx = F(x) + C$ и u=$\varphi(x)$- любая известная функция, имеющая непрерывную производную, то ,

$$\int f(u)du = F(u) + C$$

Основные формулы интегрирования (табличные интегралы)

1. $\int dx$ = x+C
2. $\int x^n$dx = $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ + C (n$\neq -1$)
3. $\int \frac{dx}{x}$=ln$|x|$+C
4. $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a}$+C
5. $\int \sin x$dx = - $\cos x$+C
6. $\int \cos x dx = \sin x$+C
7. $\int \frac{dx}{cos^2 x} = tqx + C$
8. $\int \frac{dx}{\sin x}$=ln$\left|tq\frac{x}{2}\right|$+C
9. $\int \frac{dx}{\cos x} = ln\left|tq\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right|$+C

8. $\int \frac{dx}{sin^2 x}$=- ctqx+C
9. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|$+C
10. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$ = ln$\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right|$+C
11. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = arcsin\frac{x}{a}$+C
12. $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}arctq\frac{x}{a} + C$
13. $\int e^x\,dx = e^x + C$

14.$\int tqxdx = -ln|\cos x|$+C

16.$\int ctqxdx = ln|\sin x|$+C

Пример 6.
Найти $\int\left(x^3+5x^4-x+8\right)dx.$

Решение.

$$\int\left(x^3+5x^4-x+8\right)dx=\int x^3dx+5\int x^4dx-\int xdx+8\int dx=$$
$$=\frac{x^4}{4}+5\frac{x^5}{5}-\frac{x^2}{2}+8x+C=\frac{1}{4}x^4+x^5-\frac{1}{2}x^2+8x+C.$$

Пример 7.

$$\int\frac{x^3+x^2+4x}{x}dx$$

Решение:
Выполним деление на x^2 почленно $\int\frac{x^3+3x^2+4x}{x}dx=\int(x^2+3x+4)\,d=$
$\int x^2dx+3\int xdx+4\int dx=\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}+4x+C$

Интегрирование способом подстановки

Этот способ часто бывает полезным в тех случаях, когда интеграл $\int f(x)dx$ (f(x) - непрерывна) не может быть непосредственно преобразован к виду табличного. Сделаем подстановку x $=\varphi(t)$, где $\varphi(t)-$ функция, имеющая непрерывную производную. Тогда f(x)= f[$\varphi(t)$], dx=$\varphi'(t)dt$

$\int f(x)dx=\int f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)dt$. Формула называется формулой замены переменной в неопределенном интеграле

Пример 8.
Найти $\int\frac{3xdx}{\sqrt{1+2x^2}}$.

Решение.

Применим подстановку $\sqrt{1+2x^2}=z$, где z – новая переменная. Возведем обе части равенства в квадрат: $1+2x^2=z^2$. Продифференцируем обе части равенства: $4xdx=2zdz$, $xdx=\frac{1}{2}zdz$.Данный интеграл примет вид $\int\frac{3\cdot\frac{1}{2}zdz}{z}=\frac{3}{2}\int dz=\frac{3}{2}z+C.$

Выполнив замену, получим $\int\frac{3xdx}{\sqrt{1+2x^2}}=\frac{3}{2}\sqrt{1+2x^2}+C.$

Пример 9.

Найти $\int e^{sinx} cos\, xdx.$

Решение.

$$\int e^{sinx} cosxdx = \begin{vmatrix} sinx = t \\ cosxdx = dt \end{vmatrix} = \int e^t dt = e^t + C = e^{sinx} + C.$$

Пусть $u = u(x)$ и $v = v$(x) - непрерывно дифференцируемые функции.

Тогда $d(uv) = u \cdot v + v \cdot du$

Интегрируя это равенство, получим

$$\int d(vu) = \int udv + \int vdu$$

или

$$\int udv = uv - \int vdu$$

Полученная формула называется формулой интегрирования по частям. Она дает возможность свести вычисление интеграла $\int udv$ к вычислению интеграла $\int vdu$, который может оказаться существенно более простым, чем исходный.

Некоторые типы интегралов, которые удобно вычислять методом интегрирования по частям.

1. Интегралы вида $\int P(x)e^{kx}dx,$ $\int P(x) \cdot \sin kxdx,$ $\int P(x) \cos kxd$x, где $P(x) -$ многочлен, $k -$ число. Удобно положить $u = P(x)$, а за dv обозначить все остальные сомножители

2.Интегралы вида $\int P(x) \arcsin xdx,$ $\int P(x) \arccos xdx,$ $\int P(x) \ln xdx,$ $\int P(x)arctq\, xdx,$ $\int P(x)arcctqxdx$. Удобно положить $P(x)dx = dv$, а за u обозначить остальные сомножители.

3. Интегралы вида $\int e^{ax} \sin bxdx,$ $\int e^{ax} \cos bxdx,$ где a и b −числа. За u можно принять функцию $u = e^{ax}$.

Пример 10.

Найти $\int (2\text{x} + 1)\, e^{3x}dx.$

Решение:

Пусть $\begin{bmatrix} u = 2x + 1 \ \to du = 2dx \\ dv = e^{3x}dx \ \to v = \int e^{3x}dx = \frac{1}{3}e^{3x} \end{bmatrix}$

Следовательно, по формуле интегрирования по частям

$$\int udv = uv - \int vdu$$

получим:

$$\int (2x+1)e^{3x}\,dx = (2x+1)\cdot\frac{1}{3}\cdot e^{3x} - \int \frac{1}{3}e^{3x}2dx$$
$$= \frac{1}{3}(2x+1)e^{3x} - \frac{2}{3}\int e^{3x}dx.$$

Для нахождения полученного в правой части равенства интеграла применим метод интегрирования замены переменной:

$$\int e^{3x}dx = \begin{vmatrix} 3x = t \\ dt = 3dx \\ dx = \frac{1}{3}dt \end{vmatrix} = \int e^{t}\frac{1}{3}dt = \frac{1}{3}\int e^{t}\,dt = \frac{1}{3}e^{3x} + C$$

$$\int (2x+1)e^{3x}\,dx = (2x+1)\cdot\frac{1}{3}\cdot e^{3x} - \int \frac{1}{3}e^{3x}2dx$$
$$= \frac{1}{3}(2x+1)e^{3x} - \frac{2}{3}\int e^{3x}dx = \frac{1}{3}(2x+1)e^{3x} - \frac{2}{9}e^{3x} + C.$$

Определенным интегралом от функции $f(x)$ на отрезке $a \le x \le b$ называется предел интегральной суммы при условии, что длина наибольшего из элементарных отрезков стремится к нулю:

$\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{max\Delta x_{k\to 0}} \sum_{k=1}^{n} f(\varepsilon_k)\Delta x_k.$

Для любой функции $f(x)$, непрерывной на отрезке $a \le x \le b$, всегда существует определенный интеграл

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Для вычисления определенного интеграла от функции $f(x)$ в том случае, когда можно найти соответствующий неопределенный интеграл $F(x)$, служит формула Ньютона - Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b \; F(b) - F(a)$$

т. е. определенный интеграл равен разности значений первообразной при верхнем и нижнем пределе интегрирования.

Основные свойства определенного интеграла:

1 Постоянный множитель можно вынести за знак определенного интеграла:

$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx.$$

2 Определенный интеграл от суммы двух функций равен сумме определенных интегралов от этих функций:

$$\int_a^b [f_1(x) + f_2(x)]dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx.$$

3 При перестановке пределов интегрирования определенный интеграл меняет знак на противоположный:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

4 Интеграл по сегменту равен сумме интегралов по его частям:

$$\int_a^b xdx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx,$$

где $a < c < b$.

Теорема о среднем:

Если функция f(x) непрерывна на сегменте [a; b], то в интервале (a; b) найдется такая точка c, что

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(c).$$

Пример 11.

Вычислить интеграл

$$\int_{-1}^{2} x^4 dx$$

Решение:

$$\int_{-1}^{2} x^4 dx = \left(\frac{x^5}{5}\right)\Big|_{-1}^{2} = \frac{2^5}{5} - \frac{(-1)^5}{5} = 6{,}4 - (-0{,}2) = 6{,}6.$$

Пример 12.

Вычислить интеграл

$$\int_0^{\pi} \sin x dx$$

Решение:

Пользуясь введенными обозначениями, получим:

$$\int_0^{\pi} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\pi} = -\cos\pi - (-\cos 0) = -(-1) - (-1) = 2$$

План работы:

Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3
1. $\int (1-\sqrt{x})^2\,dx$; 2. $\int (7x+3)dx$; 3. $\int x^{-4}dx$ 4. $\int x^2\sqrt{(4x^3+10x)}dx$; 5. $\int \sin x\sqrt{\cos x}dx$. 6. $\int \ln x dx$; 7. $\int_0^1 xe^{-x}dx$; 8. $\int_1^4 \frac{1+\sqrt{x}}{x^2}dx$;	1. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}}$; 2. $\int (2x+3)^2\,dx$; 3. $\int (6x+3)dx$. 4. $\int x\sqrt{(x^2-1)^3}dx$; 5. $\int e^x\sqrt{(e^x+1)}dx$. 6. $\int (2-5x)\cos x dx$ 7. $\int_0^1 \sqrt{1+x}dx$; 8. $\int_{\frac{2\pi}{9}}^{\frac{\pi}{3}} \sin(3x-\frac{\pi}{2})\ dx$;	1. $\int (5-3x)^2\,dx$; 3. $\int 2^x\,dx$; 3. $\int (8\sin x-6x+2^x)dx$. 3. $\int x^3\sqrt{(3x^4+2)}dx$; 5. $\int \frac{\cos x}{\sqrt{1-\sin x}}dx$. 6. $\int x\ln x dx$ 7. $\int_{-1}^{1} \frac{xdx}{\left(x^2+1\right)^2}$; 8. $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{2}{3}} \frac{dx}{1+x^2}$.
Вариант 4	**Вариант**	**Вариант 6**
1. $\int \frac{x+2}{x}dx$; 2. $\int (e^x+3x)dx$; 3. $\int \cos x dx$ 4. $\int \sqrt[3]{(1-5x)^4}\,dx$; 5. $\int \frac{\cos x}{2\sin x+1}dx$. 6. $\int xe^{3x}dx$ 7. $\int_{\frac{1}{8}}^{\frac{1}{4}} (8x+1)^2dx$; 8. $\int_0^{\pi} \frac{dx}{\sin^2(\frac{x}{3}-\frac{\pi}{4})}$;	1. $\int x^{-2}dx$; 2. $\int \sin x dx$; 3. $\int (e^x+5)dx$. 4. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx$; 5. $\int \frac{dx}{x(1+\ln x)}$. 6. $\int 2xe^x dx$ 7. $\int_1^{16} \sqrt{x}dx$; 8. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (2\cos x-5\sin x)\ dx$	1. $\int x^{-3}dx$; 2. $\int (x^3+4x^2-3x)dx$; 3. $\int (\cos x+5x^7)dx$. 4. $\int (4x+1)^{-8}\,dx$; 5. $\int \frac{e^{3x}}{e^{3x}+1}dx$. 6. $\int 3x\cos x dx$ 7. $\int_{\frac{\pi}{18}}^{\frac{\pi}{9}} \frac{dx}{\sin^2 3x}$; 8. $\int_3^4 \frac{dx}{25+x^2}$;

Контрольные вопросы:

1. Какое действие называется интегрированием?

2. Какая функция называется первообразной для данной функции $f(x)$?
3. Дайте определение неопределенного интеграла.
4. Дайте определение подынтегральной функции и подынтегрального выражения.
5. В чем заключается метод замены переменных при отыскании неопределенного интеграла?
6. В чем заключается метод интегрирования по частям?

7. Дайте определение определенного интеграла.
8. В чем заключается формула Ньютона-Лейбница?
9. Вычислите основные свойства определенного интеграла.

Литература: [3, с. 188-192], [3, с. 201-202], [1, с. 271-276]

Практическая работа №3
«Действия над комплексными числами, заданными в алгебраической и тригонометрической форме»
Цель работы:
уметь:
- выполнять действия над комплексными числами, представленными в различных формах.

Необходимые для выполнения работы знания:
студент должен:
знать:
- алгебраическую форму комплексного числа;
- тригонометрическую форму комплексного числа;
- показательную форму комплексного числа (формулу Муавра).

Сведения из теории:
1. Алгебраическая форма комплексного числа

Обозначим $\sqrt{-1} = i$ и назовём мнимой единицей, ($i^2 = -1$). Тогда число вида $z = a + bi,$ где a и b - любые действительные числа, назовём комплексным числом.

Здесь a - называют действительной частью комплексного числа, bi - называют мнимой частью, b - коэффициентом мнимой части комплексного числа.

Действия над комплексными числами, представленными в алгебраической форме

Пусть даны два числа $z_1 = a_1 + b_1 i,$ и $z_2 = a_2 + b_2 i$.

Для этих чисел понятия равенство и действия сложения, умножения определены следующим образом:

1) Два комплексных числа называются равными, если равны их действительная и мнимая части, т. е. $a_1=a_2$, $b_1=b_2$.

2) Суммой двух комплексных чисел z_1 и z_2 называется комплексное число $z_1+z_2=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)i$.

3) Произведением двух комплексных чисел z_1 и z_2 называется комплексное число $z_1z_2=(a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)i$.

4) Модулем комплексного числа называется длина вектора соответствующего этому комплексному числу на плоскости и вычисляется по формуле: $|\bar{z}|=r=\sqrt{a^2+b^2}$.

5) Аргументом комплексного числа называется угол, образованный вектором с положительным направлением действительной оси и вычисляется по формуле: $\arg z=\arg(a+bi)=\phi+2\pi k$. Т. о. для каждого комплексного числа можно указать бесконечное множество аргументов.

Для нахождения аргумента необходимо:

1. Определить в какой координатной четверти находится комплексное число.
2. Найти в этой четверти угол решив уравнение:

$$tg\phi=\frac{b}{a};\ \ \phi=\arg\frac{b}{a}=\phi+\pi k,\ \ k\in Z\ .$$

Пример №31.

Решите квадратное уравнение: $x^2-6x+13=0$.

Решение:

вычислим корни квадратного уравнения через дискриминант:

$$x_{1,2}=\frac{6\pm\sqrt{36-4\cdot13}}{2}=\frac{6\pm\sqrt{36-52}}{2}=\frac{6\pm\sqrt{16\cdot(-1)}}{2}=\frac{6\pm4i}{2}.$$

$$x_1=\frac{6\pm4i}{2}=\frac{2(3+2i)}{2}=3+2i;\ \ x_2=3-2i.$$

Получена пара взаимно - сопряжённых комплексных чисел $3\pm2i,$ где $a=3; b=2.$

Заметим, что всякое алгебраическое уравнение степени *n* имеет ровно *n* корней, среди которых могут быть как действительные (различные или равные), так и комплексные (обязательно попарно взаимно – сопряжённые) корни.

2. Тригонометрическая форма комплексного числа

Запись комплексного числа в виде $a+bi=r(\cos\phi+i\sin\phi)$ называется тригонометрической формой комплексного числа.

Действия над комплексными числами, представленными в тригонометрической форме

Над комплексными числами в тригонометрической форме выполняются действия умножения, деления, возведения в степень и извлечение корня *n*-ой степени.

Пусть даны два числа $z_1 = r_1(\cos\phi_1 + i\sin\phi_1)$ и $z_2 = r_2(\cos\phi_2 + i\sin\phi_2)$, тогда:

1) Произведением комплексных чисел называется комплексное число, которое вычисляется по формуле: $z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\phi_1 + \phi_2) + i\sin(\phi_1 + \phi_2))$

2) Частным комплексных чисел называется комплексное число, которое вычисляется по формуле: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\phi_1 - \phi_2) + i\sin(\phi_1 - \phi_2))$

3) Для возведения в степень: $z^n = r^n(\cos(n\phi) + i\sin(n\phi))$

Пример №32.

Упростите: $\frac{1+2i^5}{1+3i^{21}}$.

Решение:

Упростим дробь (понизим степень числителя и знаменателя), используя ($i^2 = -1$):

$$i^5 = i^4 i^1 = (i^2)^2 i = (-1)^2 i = i;$$
$$i^{21} = i^{20} i^1 = (i^2)^{10} i = (-1)^{10} i = i.$$

Подставим полученные выражения в исходную дробь и преобразуем её:

$$\frac{1+2i^5}{1+3i^{21}} = \frac{1+2i}{1+3i} = \frac{(1+2i)(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)} = \frac{1-3i+2i-6i^2}{1-9} = \frac{1-i+6}{-8} = \frac{7-i}{-8} = \frac{i-7}{8}$$

Пример №33.

Вычислите: $(\sqrt{2}(\cos 10^0 + i\sin 10^0))^2 \cdot 2(\cos 40^0 + i\sin 40^0)$.

Решение:

для первого комплексного числа используем формулу возведения в степень, а затем воспользуемся формулой произведения комплексных чисел:

$$2(\cos 20^0 + i\sin 20^0)\cdot 2(\cos 40^0 + i\sin 40^0) = 4(\cos 60^0 + i\sin 60^0) = 4(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) = 2 + 2\sqrt{3}i$$

Для извлечения корня n-й степени из комплексного числа $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ используется формула

$$z_k = \sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right),$$

где $\sqrt[n]{r}$ - арифметический корень, $k = 0, 1, 2, ..., n-1$.

Пример №34.

Решите уравнение: $x^2-2x+10=0$.

Решение:

для решения воспользуемся обычными формулами вычисления корней квадратных уравнений:

$$a = 1,\; b = -2,\; c = 10$$

$$D = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4\cdot 1\cdot 10 = 4 - 40 = -36$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{2 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{36\cdot(-1)}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{36\cdot i^2}}{2} = \frac{2 \pm 6i}{2} = \frac{2(1 \pm 3i)}{2} = 1 \pm 3i.$$

Получили пару комплексных взаимно сопряженных корней.

Пример №35.

Извлечь корень из комплексного числа: $\sqrt{i}$.

Решение:

Представим число i в тригонометрической форме: $i = 0 + 1\cdot i = \cos(\pi/2) + i\sin(\pi/2)$.

$$z_k = \sqrt{i} = \sqrt{\cos(\pi/2) + i\sin(\pi/2)} = \cos\frac{\pi/2 + 2\pi k}{2} + i\sin\frac{\pi/2 + 2\pi k}{2} = ,$$

$$= \cos(\pi/4 + \pi k) + i\sin(\pi/4 + \pi k)$$

где k=0, 1;

если k=0, то $z_0 = \cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4) = \sqrt{2/2} + \left(\sqrt{2/2}\right)i$;

если k=1, то $z_1 = \cos(\pi/4 + \pi) + i\sin(\pi/4 + \pi) = -\cos(\pi/4) - i\sin(\pi/4) = -\sqrt{2/2} - \left(\sqrt{2/2}\right)i$.

Пример №36.

Извлечь корень из комплексного числа: $\sqrt[3]{1}$.

Решение:

Представим число 1 в тригонометрической форме: $1 = \cos 0 + i\sin 0$.

$$z_k = \sqrt[3]{1} = \sqrt[3]{\cos 0 + i\sin 0} = \cos\frac{0 + 2\pi k}{3} + i\sin\frac{0 + 2\pi k}{3} = \cos\frac{2\pi k}{3} + i\sin\frac{2\pi k}{3},$$

где $k = 0, 1, 2$;

если k=0, то $z_0 = \cos 0 + i\sin 0 = 1$;

если k=1, то $z_1 = \cos\frac{2\pi k}{3} + i\sin\frac{2\pi k}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$;

если k=2, то $z_2 = \cos\frac{4\pi k}{3} + i\sin\frac{4\pi k}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

План работы:

№1. Выполните действия, вычислите аргумент и модуль комплексного числа:

1 вариант	**2 вариант**
1) $\left(\frac{1 - i\sqrt{3}}{2}\right)^2$	1) $\frac{1 + 2i^{15}}{1 + 3i^{21}}$
2) $4 + (1+i)^3 - (1-i)^3$	2) $(1-i)^{10}$
3) $\frac{(2+3i)^2}{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)}$	3) $\frac{4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)}{1 - i^2}$

4 вариант 1) $\frac{1-2i^{23}}{1-3i}$ 2) $5+(2+i)^2-(1-i)^3$ 3) $\frac{2\left(\cos 40^0+i\sin 40^0\right)}{\left(\sqrt{3}(\cos 10^0+i\sin 10^0)\right)}$	**3 вариант** 1) $\frac{3+3i}{1+i^{15}}$ 2) $4+(1+i)^3-(1-i)^3$ 3) $4\left(\cos 10^0+i\sin 10^0\right)\cdot\frac{1}{2}\left(\cos 20^0+i\sin 20^0\right)$
5 вариант 1) $\frac{1+2i^{11}}{1-3i^{23}}$ 2) $\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i^{14}}$ 3) $\frac{4\left(\cos 360^0+i\sin 360^0\right)}{2\left(\cos 60^0+i\sin 60^0\right)}$	**6 вариант** 1) $\frac{1-i\sqrt{2}}{1+i^{12}}$ 2) $\frac{\left(1-i^3\right)(2+i)}{3-i^{13}}$ 3) $3(\cos\pi+i\sin\pi)\cdot 2(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2})$

№2. Решите уравнение:

1 вариант	**2 вариант**	**3 вариант**
x^2-6x+13=0	x^2+3x+4=0	x^2-4x+16=0
4 вариант	**5 вариант**	**6 вариант**
9x^2+12x+29=0	2,5x^2+x+1=0	x^2-2x+4=0

№3. Извлеките корни:

1 вариант	**2 вариант**	**3 вариант**
$\sqrt[3]{-1}$	$\sqrt[4]{-1}$	$\sqrt[3]{i}$
4 вариант	**5 вариант**	**6 вариант**
$\sqrt[4]{4}$	$\sqrt[6]{1}$	$\sqrt[4]{i}$

Контрольные вопросы:

1) Дайте определение алгебраической форме комплексного числа.
2) Перечислите действия над комплексными числами, представленными в алгебраической форме.
3) Дайте определение тригонометрической форме комплексного числа.
4) Перечислите действия над комплексными числами, представленными в тригонометрической форме.

Литература: [2, §1-5, с.15-76]

Практическая работа №4.

«Определение сходимости рядов по признаку Даламбера. Определение сходимости знакопеременных рядов. Разложение функций в ряд Маклорена»

Цель работы:

уметь:

- записать ряд по его заданному общему члену;
- находить $n-й$ член ряда по его данным первым членам;
- находить сумму членов ряда;
- исследовать сходимость ряда в точках;
- исследовать сходимость ряда в точках;
- раскладывать функции в ряд Маклорена.

Необходимые для выполнения работы знания:

студент должен:

знать:

- основные понятия числовых рядов;
- необходимый и достаточный признаки сходимости рядов;
- разложение функций в степенные ряды;
- алгоритм разложения функции в ряд Маклорена.

Сведения из теории:

Числовым рядом называется сумма вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots,$$

где числа $u_1, u_2, u_3, \ldots u_n, \ldots,$ называемые *членами* ряда, образуют бесконечную последовательность; член u_n называется *общим членом* ряда.

Пример №13.

Записать ряд по его заданному общему члену: $u_n = \dfrac{n+1}{2^n}$.

Решение:

полагая $n=1$, $n=2$, $n=3$, …, имеем бесконечную последовательность чисел:
$u_1 = \dfrac{2}{3}, u_2 = \dfrac{3}{4}, u_3 = \dfrac{4}{8}, \ldots .$

Сложив ее члены, получим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n+1}{2^n} = \dfrac{2}{2} + \dfrac{3}{4} + \dfrac{4}{8} + \ldots + \dfrac{n+1}{2^n} + \ldots .$

Пример № 14

Найти $n = й$ член ряда по его данным первым членам: $\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{7} + \ldots .$

Решение:

Знаменатели членов ряда, начиная с третьего, являются нечетными числами; следовательно, $n-й$ член ряда имеет вид $\dfrac{1}{2n+1}$.

Пример №15.
Найти сумму членов ряда:
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}+\ldots.$$

Решение:
находим частные суммы членов ряда:
$$S_1=u_1=\frac{1}{3};$$
$$S_2=u_1+u_2=\frac{1}{3}+\frac{1}{15}=\frac{2}{5};$$
$$S_3=u_1+u_2+u_3=\frac{2}{5}+\frac{1}{35}=\frac{3}{7};$$
$$S_4=u_1+u_2+u_3+u_4=\frac{3}{7}+\frac{1}{63}=\frac{4}{9},\ \ldots.$$
Запишем последовательность частных сумм: $\frac{1}{3},\ \frac{2}{5},\ \frac{3}{7},\ \frac{4}{9},\ldots,\frac{n}{2n+1},\ldots.$

Общий член этой последовательности есть $\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{2+\frac{1}{n}}$.

Следовательно, $S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2+\frac{1}{n}}=\frac{1}{2}$.

Степенным рядом называется ряд вида
$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots a_nx^n+\ldots\ ,$$
где числа $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n,$ называются *коэффициентом* ряда, а член a_nx_n - *общим членом ряда*.
Областью сходимости степенного ряда называется множество всех значений x, при которых данный ряд сходится.
Чисто R называется *радиусом сходимости* ряда, если при $|x|<R$ ряд сходится и притом абсолютно, а при $|x|>R$ ряд расходится.
Число сходимости R можно найти, используя признак Даламбера:
$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|\ \ (a_n\neq 0,\ n=1, 2, 3, \ldots)$$
Радиус сходимости ряда R равен этому пределу и ряд сходится при $|x|<R$, т.е. в промежутке $-R<x<R$, который называется *промежутком (интервалом) сходимости.*
Если предел равен нулю ($R=0$), то ряд сходится в единственной точке $x=0$.
На концах промежутка ряд может сходиться (абсолютно или условно), но может и расходиться.

Сходимость ряда при $x=-R$ и $x=R$ исследуется с помощью какого-либо из признаков стоимости.

Пример №16.

Дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}x^n=\frac{1}{3}x+\frac{2}{3^2}x^2+\frac{3}{3^3}x^3+\ldots+\frac{n}{3^n}x^n+\ldots$. Исследовать его сходимость в точках *x=1, x=3, x=-2.*

Решение:

при $x=1$ данный ряд превращается в числовой ряд

$u_n=\frac{n}{3^n}$; $u_{n+1}=\frac{n+1}{3^{n+1}}$; $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{(n+1)\cdot 3^n}{3^{n+1}\cdot n}=\frac{n+1}{3n}=\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)$;

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{1}{3}\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{3}<1$, т.е. ряд сходится.

При $x=3$ получим ряд $\frac{1}{3}\cdot 3+\frac{2}{3^2}\cdot 3^2+\frac{3}{3^3}\cdot 3^3+\ldots+\frac{n}{3^n}+\ldots$ или $1+2+3+\ldots+n+\ldots$, который расходится, так как не выполняется необходимый признак сходимости ряда $\left(\lim\limits_{n\to\infty}n\neq 0\right)$.

При $x=-2$ получим ряд

$$\frac{1}{3}(-2)+\frac{2}{3^2}(-2)^2+\frac{3}{3^3}(-2)^3+\ldots+\frac{n}{3^n}\cdot 3^n+\ldots$$

или

$$-\frac{1}{3}\cdot 2+\frac{2}{3^2}\cdot 2^2-\frac{3}{3^3}\cdot 2^3+\ldots+(-1)^n\cdot\frac{n}{3^n}\cdot 2^n+\ldots\ .$$

Это знакочередующийся ряд, который, сходится.

Итак, в точках $x=1$ и $x=-2$ ряд сходится, а в точке $x=3$ расходится.

Рядом Тейлора для функции f(x) называется степенной ряд вида

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\ldots$$

Если a=0, то получим частный случай ряда Тейлора

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots,$$

который называется *рядом Маклорена*.

Степенной ряд внутри его промежутка сходимости можно почленно дифференцировать и интегрировать сколько угодно раз, причем полученные ряды имеют тот же промежуток сходимости, что и исходный ряд.

Два степенных ряда можно почленно складывать и умножать по правилам сложения и умножения многочленов. При этом промежуток сходимости полученного нового ряда совпадает с общей частью промежутков сходимости исходных рядов.

Для разложения функции f(x) в ряд Маклорена необходимо:

1) вычислить значения функции и ее последовательных производных в точке *x=0,* т.е. $f(0), f'(0), f''(0) \ldots f^{(n)}(0)$

2) составить ряд Маклорена, подставив значения функции и ее последовательных производных в формулу;

3) найти промежуток сходимости полученного ряда.

Пример №17.

Разложить в ряд Маклорена функцию: $f(x) = e^x$.

Решение:

Вычислим значения функции и её производных при x=0.

Имеем

$f(x)=e^x$,

$f'(x)=e^x$,

$f''(x)=e^x, \ldots$,

$f^{(n)}(x)=e^x$;

Вычислим значения производных функций в точке x=0:

$f(0)=1$,

$f'(0)=1$,

$f''(0)=1, \ldots$,

$f^{(n)}(0)=1$, где n=1,2,3,….

Подставив эти значения в формулу получим разложение функции $f(x)=e^x$ в ряд Маклорена:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots \quad .$$

Этот ряд называется *экспонентным рядом.*

План работы:

Вариант 1 Исследовать ряды на сходимость. 1) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)!}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^n \cdot n^2}{5^n}$. Разложить функцию в ряд Маклорена. $f(x) = \frac{1}{x-1}$;	**Вариант 2** *Исследовать ряды на сходимость.* 1) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (\frac{n}{2n+1})^n$; *2)* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{2n}$. Разложить функцию в ряд Маклорена. $f(x) = \sin 2x$.
Вариант 3 *Исследовать ряды на сходимость.* 1) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n}{3^n}$;	**Вариант 4** Исследовать ряды на сходимость. 1) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)(n+4)}$;

2) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2n}{n^2+1}$. Разложить функцию в ряд Маклорена. 2) $f(x)=e^{x+1}$.	2) $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{n3^n}$. Разложить функцию в ряд Маклорена. $f(x)=e^{-3x}$;
Вариант 5 Исследовать ряды на сходимость. 1) $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{3^{2n+1}}{2^{3n-1}}$; 2) $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{(n+1)\cdot 5^n}$. Разложить функцию в ряд Маклорена. $f(x)=\cos\frac{x}{2}$	**Вариант 6** Исследовать ряды на сходимость. 1) $\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{7^{2n}}{(2n-5)!}$; 2) $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{(4n-1)^2}$. Разложить функцию в ряд Маклорена. $f(x)=e^{-x}$;

Контрольные вопросы:

1. Сформулировать достаточный признак сходимости?
2. Сформулировать достаточный признак Даламбера?
3. Сформулировать достаточный признак Коши?
4. Сформулировать достаточный признак сравнения?
5. Записать определение знакочередующего ряда?
6. Записать ряд Тейлора?
7. Записать ряд Маклорена?
8. В чем отличие ряда Тейлора от ряда Маклорена?

Литература: [5, с. 300-306], [5, с. 391-400]

Практическая работа №5.
«Решение обыкновенных дифференциальных уравнений первого и второго порядка»

Цель работы:
уметь:

- владеть навыками решения однородных дифференциальных уравнений первого порядка;

- владеть навыками решения линейных дифференциальных уравнений первого порядка;
- решать линейные однородные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами;
- решать прикладные задачи.

Необходимые для выполнения работы знания:
студент должен:
знать:
- определение дифференциального уравнения, виды дифференциальных уравнений;
- формулы общих и частных решений дифференциальных уравнений.

1. Дифференциальное уравнение *первого порядка*, содержит:
1) независимую переменную x;
2) зависимую переменную y (функцию);
3) первую производную функции: y'.
Решить дифференциальное уравнение – это значит, найти множество функций $y = f(x) + C$, которые удовлетворяют данному уравнению. Такое множество функций называется общим решением дифференциального уравнения.
Пример №23:
Решить дифференциальное уравнение $xy' = y$
Решение:
$$y' = \frac{dy}{dx}.$$
$$x \cdot \frac{dy}{dx} = y$$
В рассматриваемом примере переменные легко разделяются перекидыванием множителей по правилу пропорции:
$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$$
Переменные разделены. В левой части – только «игреки», в правой части – только «иксы».
Следующий этап – интегрирование дифференциального уравнения. Интегрируем обе части:
$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$$
$$\ln|y| = \ln|x| + C$$
Решение дифференциального уравнения в неявном виде называется общим интегралом дифференциального уравнения. То есть, $\ln|y| = \ln|x| + C$ – это общий интеграл.

Вместо записи $\ln|y| = \ln|x| + C$ обычно пишут $\ln|y| = \ln|x| + \ln|C|$.
В данном случае:
$\ln|y| = \ln|Cx|$
$y = Cx$
Функция представлена в явном виде. Это и есть общее решение.
Множество функций $y = Cx$, где $C = const$ является общим решением дифференциального уравнения $xy' = y$.
Придавая константе C различные значения, можно получить бесконечно много частных решений дифференциального уравнения.

Пример №24:
Найти частное решение дифференциального уравнения $y' = -2y$, удовлетворяющее начальному условию $y(0) = 2$
Решение:
По условию требуется найти частное решение ДУ, удовлетворяющее начальному условию. Такая постановка вопроса также называется *задачей Коши*.
Сначала находим общее решение.
$\frac{dy}{dx} = -2y$
$\frac{dy}{y} = -2dx$
Интегрируем уравнение:
$\int \frac{dy}{y} = -2\int dx$
$\ln|y| = -2x + C^*$
$y = e^{-2x+C^*}$
$y = e^{C^*} \cdot e^{-2x}$
Итак, общее решение: $y = Ce^{-2x}$, где $C = const$. На завершающем этапе нужно найти частное решение, удовлетворяющее заданному начальному условию $y(0) = 2$.
Необходимо подобрать такое значение константы C, чтобы выполнялось заданное начальное условие $y(0) = 2$.
В общее решение вместо «икса» подставляем ноль, а вместо «игрека» двойку:

$y(0) = Ce^{-2\cdot 0} = Ce^0 = C = 2$
В общее решение $y = Ce^{-2x}$ подставляем найденное значение константы $C = 2$:
$y = 2e^{-2x}$ – это и есть нужное нам частное решение.

Пример №25:

Решить дифференциальное уравнение $y' + (2y+1)ctgx = 0$

Решение: Переписываем производную в нужном нам виде:

$$\frac{dy}{dx} + (2y+1)ctgx = 0$$

Переносим второе слагаемое в правую часть со сменой знака:

$$\frac{dy}{dx} = -(2y+1)ctgx$$

$$\frac{dy}{2y+1} = -ctgxdx$$

Переменные разделены, интегрируем обе части:

$$\int \frac{dy}{2y+1} = -\int ctgxdx \int \frac{dy}{2y+1} = -\int \frac{\cos xdx}{\sin x}$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{d(2y+1)}{2y+1} = -\int \frac{d(\sin x)}{\sin x}$$

$$\frac{1}{2}\ln|2y+1| = -\ln|\sin x| + \ln|C|$$

Решение распишу очень подробно:

$$\ln|2y+1|^{\frac{1}{2}} = \ln|\sin x|^{-1} + \ln|C|$$

$$\ln\sqrt{2y+1} = \ln\frac{1}{|\sin x|} + \ln|C|$$

$$\ln\sqrt{2y+1} = \ln\left|\frac{C}{\sin x}\right|$$

$$\sqrt{2y+1} = \frac{C}{\sin x}$$

Ответ: общий интеграл: $\sqrt{2y+1}\cdot\sin x = C$, где $C = const$

Примечание: общий интеграл любого уравнения можно записать не единственным способом. Таким образом, если у вас не совпал результат с заранее известным ответом, то это еще не значит, что вы неправильно решили уравнение.

Пример №26:

Найти частное решение дифференциального уравнения $e^{y-x^2}dy - 2xdx = 0$, удовлетворяющее начальному условию $y(0) = \ln 2$. Выполнить проверку.

Решение:

Сначала найдем общее решение. Данное уравнение уже содержит готовые дифференциалы dy и dx, а значит, решение упрощается. Разделяем переменные:

$$e^y \cdot e^{-x^2} dy - 2xdx = 0$$

$$e^y \cdot e^{-x^2} dy = 2xdx$$

$$e^y dy = \frac{2xdx}{e^{-x^2}}$$

$$e^y dy = 2xe^{x^2} dx$$

Интегрируем уравнение:

$$\int e^y dy = 2\int xe^{x^2} dx$$

$$\int e^y dy = \int e^{x^2} d(x^2)$$

$$e^y = e^{x^2} + C$$

$$\ln e^y = \ln(e^{x^2} + C)$$

$$y = \ln(e^{x^2} + C)$$

общее решение:

$y = \ln(e^{x^2} + C)$, где $C = const$

Найдем частное решение, соответствующее заданному начальному условию $y(0) = \ln 2$

$$\ln 2 = \ln(e^0 + C)$$

$$\ln 2 = \ln(1 + C) \Rightarrow C = 1$$

$$y(0) = \ln(e^0 + C) = \ln(1 + C) = \ln 2 \Rightarrow C = 1$$

Подставляем найденное значение константы $C = 1$ в общее решение.

Ответ: частное решение: $y = \ln(e^{x^2} + 1)$

Определение: уравнение вида

$$y' + py = g \quad (1),$$

где p(x) и f(x) – непрерывные функции, называется линейным дифференциальным уравнением первого порядка.

Определение: если $g = 0$, то уравнение (1) называется линейным однородным уравнением. Если $g \neq 0$, то уравнение (1) называется линейным неоднородным уравнением.

Замечание: линейные однородные ДУ решаются как ДУ с разделяющимися переменными (см тему 2). Линейные неоднородные ДУ решаются методом Бернулли.

Метод Бернулли
1. Приводят уравнение к виду $y' + py = g$. 2. Используя подстановку $y = uv$, находят $y = u'v + v'u$ и подставляют эти выражения в уравнение. 3. Группируют члены уравнения, выносят одну из функций *u или v за скобки.* Находят вторую функцию, приравняв выражение в скобках нулю и решив полученное уравнение.

4. Подставляют найденную функцию в оставшееся выражение и находят вторую функцию.
5. Записывают общее решение, подставив выражения для найденных функций u и v в равенство $y = uv$.
6. Если требуется найти частное решение, то определяют С из начальных условий и подставляют в общее решение.

Пример 27.

Решить уравнение $y' - \frac{3}{x} y = x$.

Решение:

это линейное уравнение, так как оно имеет вид $y' + py = g$, где $p = -\frac{3}{x}$, $g = x$.

Положим $y = uv$; тогда $y = u'v + v'u$.

Подставив выражения y и y' в исходное уравнение, получим

$$u'v + v'u - \frac{3}{x} uv = x$$

или

$$u\left(v' - \frac{3}{x} v\right) + u'v = x \quad (1)$$

приравняем выражение в скобках в уравнении (1)к нулю:

$$v' - \frac{3}{x} = 0.$$

Разделяя переменные в полученном уравнении, имеем

$\frac{dv}{v} = 3\frac{dx}{x}$; $\int \frac{dv}{v} = 3\int \frac{dx}{x}$; $\ln v = 3\ln x$; $v = x^3$ (произвольную постоянную С приравняли к нулю).

Найденное значение v подставляем в уравнение (1):

$u'x^3 = x$; $u' - \frac{1}{x^2}$; $du = \frac{1}{x^2} dx$; $\int du = \int \frac{dx}{x^2}$; $u = -\frac{1}{x} + C$ (здесь С писать обязательно, иначе получится не общее решение, а частное решение).

Тогда окончательно получим $y = uv = \left(C - \frac{1}{x}\right) x^3$.

Если требуется найти частное решение, то определяют C из начальных условий и подставляют в общее решение.

Дифференциальные уравнения второго порядка

Дифференциальное уравнение второго порядка (Д.У. — II) содержит вторую производную некоторой функции, саму эту функцию, независимую переменную и первую производную

Д.У. - II можно записать в виде: $F(x, y, y', y'') = 0$ или $y'' = f(x, y, y')$.

Общим решением Д.У. – II называется функция $y = \varphi(x, C_1, C_2)$, зависящая от двух произвольных постоянных C_1 и C_2 такая, что:

1) она удовлетворяет уравнению при любых значениях постоянных C_1 и C_2;

2) каковы бы ни были начальные условия $y(x_0)=y_0, y'(x_0)=y_0'$, можно найти такие значения C_1^0 и C_2^0, при которых функция $y=\varphi(x, C_1^0, C_2^0)$ удовлетворяет этим условиям.

Всякая функция, полученная из общего решения при конкретных значениях постоянных C_1, C_2, называется частным решением Д.У. – II.

Рассмотрим способ решения однородного Д.У. – II с постоянными коэффициентами

$$y''+py'+qy=0.$$

Общее решение уравнения находится с помощью *характеристического* уравнения:

$$r^2+pr+q=0,$$

которое получится, если, сохранив в данном Д.У. – II коэффициенты *1, p, q*, заменить функцию *y* единицей, а производные y' и y'' соответствующими степенями r (r и r^2).

Возможны три случая:

1) если корни характеристического уравнения действительны и различны $r_1 \neq r_2$, то общее решение Д.У. – II имеет вид

$$y=C_1\cdot e^{r_1x}+C_2\cdot e^{r_2x}.$$

2) если корни уравнения действительны и одинаковы $r_1=r_2$ (обозначим их $r_1=r_2=r$), то общее решение уравнения

$$y=e^{rx}(C_1+x\cdot C_2).$$

3) если корни уравнения представляют собой пару взаимно–сопряжённых комплексных чисел $r_{1,2}=\alpha\pm\beta i$ с действительной частью α и с коэффициентом мнимой части β, то общее решения уравнения

$$y=e^{\alpha x}\cdot(C_1\cdot\cos\beta x+C_2\cdot\sin\beta x).$$

Пример №28.

Решить уравнение: $y''+6y'+9y=0$

Решение:

составим характеристическое уравнение и вычислим его корни:

$r^2+6r+9=0$

$r_{1,2}=-3$ - два равных корня.

$y=e^{-3x}\cdot(C_1+x\cdot C_2)$ - общее решение.

План работы:

Вариант 1
1. Найти общее решение уравнения:

$(x+y)dx + 2x\,dy = 0$

2. Найти частное решение уравнения, удовлетворяющее указанным начальным условиям:

$xy' + y = \frac{x^2 + y^2}{x}$; $y = 0$ при $x = 1$.

3. Найти частное решение уравнения, удовлетворяющее указанным начальным условиям:

$\frac{dy}{dx} - \frac{3y}{x} = e^x x^3$; $y = e$ *при* $x = 1$.

4. $y'' + y' - 6y = 0$, если $y = 1$ и $y' = 1$ при $x = 0$

Вариант 2

1. Найти общее решение уравнения:

$(x^2 - 1 + 2x + y^3)dx + 3xy^2dy = 0$

2. Найти частное решение уравнения, удовлетворяющее указанным начальным условиям:

$(x^2 - y^2)dx + xydy = 0$; $y = 2$ при $x = 1$.

3. Найти частное решение уравнения, удовлетворяющее указанным начальным условиям:

$y' + 2y = 4x$; $y = 3$ при $x = 0$.

4. $y'' - 2y' - 8y = 0$, если $y = 4$ и $y' = 10$ при $x = 0$

Вариант 3

1. Найти общее решение уравнения:

$(4x^2 - 3x + y^3)dx + 3xy^2dy = 0$

2. Найти частное решение уравнения, удовлетворяющее указанным начальным условиям:

$(x^2 + xy + y^2)dx - xydy = 0$; $y = 0$ при $x = 1$.

3.Найти частное решение уравнения, удовлетворяющее указанным начальным условиям:

$y' + 2y = 4x$; $y = 3$ при $x = 0$.

4. $y'' + y' - 6y = 0$, если $y = 0$ и $y' = -10$ при $x = 0$

Вариант 4

1. Найти общее решение уравнения:

$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + y^2 + x}{x^2}$

2. Найти частное решение уравнения, удовлетворяющее указанным начальным условиям

условиям:

$(x+2y)dx+(x-2y)dy=0; y=1{,}5$ при $x=1$.

3. Найти частное решение уравнения, удовлетворяющее указанным начальным условиям:

$\frac{dy}{dx}+\frac{2y}{x}=\frac{1}{x^2}$; $y=1$ *при* $x=2$.

4. $y''-2y'-8y=0,$ если $y=5$ и $y'=14$ при $x=0$

Вариант 5

1. Найти общее решение уравнения:

$(x-y)dy-ydx=0$

2. Найти частное решение уравнения, удовлетворяющее указанным начальным условиям:

$3xy'=2y+9x; y=1$ при $x=2$.

3. Найти частное решение уравнения, удовлетворяющее указанным начальным условиям:

$3xy'=2y+9x; y=1$ при $x=2$.

4. $y''-3y'+2y=0,$ если $y=2$ и $y'=3$ при $x=0$

Вариант 6

1. Найти общее решение уравнения:

$y^2dx+(x^2-xy)dy=0$

2. Найти частное решение уравнения, удовлетворяющее указанным начальным условиям:

$xy'=5y-7x; y=2$ при $x=1$.

3. Найти частное решение уравнения, удовлетворяющее указанным начальным условиям:

$y'+\frac{y-1}{x}=1; y=2$ при $x=2$.

4. $y''+2y'-8y=0,$ если $y=4$ и $y'=-4$ при $x=0$

Контрольные вопросы:

1) Дайте определение дифференциального уравнения первого порядка.
2) Приведите способы решения дифференциальных уравнений.
3) В чем заключается задача Коши?
4) Когда линейное дифференциальное уравнение называют линейным однородным дифференциальным уравнением?
5) По каким формулам находятся корни ЛДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами?
6) От чего зависит порядок дифференциального уравнения?
7) Записать определение однородного линейного дифференциального уравнения n-ого порядка?

Литература: [5, Раздел II, Глава 15, §1-5, с. 243-253],

Практическая работа №6
Тема: Вычисление интегралов по формулам прямоугольников, трапеций и формуле Симпсона. Оценка погрешности.
Цель работы:
уметь:

- вычислять определенные интегралы по формулам прямоугольников, трапеций и формуле Симпсона.

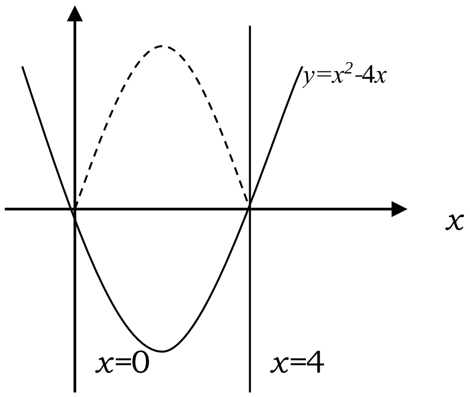
Необходимые для выполнения работы знания:
студент должен:
знать:
- формулы прямоугольников, трапеций и формулу Симпсона для приближенного вычисления определенных интегралов.

Сведения из теории:
Вычисление объема тела вращения.

1) Построить фигуру в декартовой системе координат.
2) Выбрать пределы интегрирования по оси OX в порядке возрастания.
3) Вычислить объем фигуры по формуле:

$$V = \pi \int_{x_1}^{x_2} y^2(x)dx.$$

Пример 29.
Вычислить объем тела, полученного от вращения вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями: $y = x^2 - 4x, \; x = 0, \; x = 4$.
Решение:
построим фигуру в декартовой системе координат:



Вычислим объем получившегося тела вращения по формуле

$$V = \pi \int_{x_1}^{x_2} y^2(x)dx$$

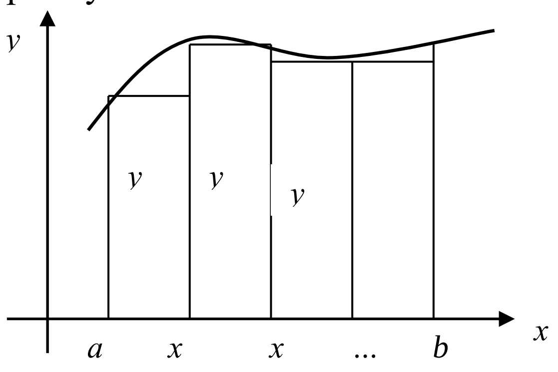
$$V = \pi \int_0^4 (x^2 - 4x)^2 dx = \pi \int_0^4 (x^4 - 8x^3 + 16x^2)dx = \pi \left(\frac{x^5}{5} - \frac{8x^4}{4} + \frac{16x^3}{3} \right)\Bigg|_0^4 = \pi \left[\left(\frac{4^5}{5} - \frac{8 \cdot 4^4}{4} + \frac{16 \cdot 4^3}{3} \right) - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{0^5}{5} - \frac{8 \cdot 0^4}{4} + \frac{16 \cdot 0^3}{3} \right) \right] = \frac{512\pi}{15}$$

Приближенное вычисление определенного интеграла.

Иногда приходится вычислять интегралы, для которых подынтегральная функция задана не аналитически, а каким либо иным образом (табличным, графическим и т. д.). В этой связи разработаны приближенные методы вычисления определенных интегралов. Самые простые из них используют геометрический смысл интеграла – площадь криволинейной трапеции, которую можно подсчитать приближенно многими способами.

Например, таким: разобьем отрезок [a, b] на равные участки длины $h = \frac{b-a}{n}$ и, подсчитав значения $y_i (i = 0,\ 1,\ ...,\ n-1)$ в точках деления, заменим криволинейную трапецию ступенчатой фигурой, составленной из прямоугольников.



Тогда

$$\int_a^b y(x)dx \approx \frac{b-a}{n}(y_0 + y_1 + ... + y_{n-1}).$$

Эта приближенная формула носит название *формулы прямоугольников*.

Взяв вместо прямоугольников трапеции, мы практически при том же объеме вычислений получим более точный результат. Выполните соответствующий рисунок самостоятельно.

Тогда

$$\int_a^b y(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0}{2} + y_1 + \ldots + y_{n-1} + \frac{y_n}{2}\right).$$

Эта приближенная формула носит название *формулы трапеций*.

Пример 30.

Вычислить приближенно интеграл $\int_0^{10}(3x^2 + 2x + 2)dx$ по формуле прямоугольников при n=10.

Решение:

$$\int_a^b y(x)dx = \int_0^{10}(3x^2 + 2x + 2)dx \approx \frac{10-0}{10}(y(0) + y(1) + y(2) + y(3) + y(4) + y(5) + y(6) + y(7) + y(8) + y(9)) =$$

$$= \frac{10}{10}((3\cdot 0^2 + 2\cdot 0 + 2) + (3\cdot 1^2 + 2\cdot 1 + 2) + (3\cdot 2^2 + 2\cdot 2 + 2) + (3\cdot 3^2 + 2\cdot 3 + 2) + (3\cdot 4^2 + 2\cdot 4 + 2) +$$

$$+ (3\cdot 5^2 + 2\cdot 5 + 2) + (3\cdot 6^2 + 2\cdot 6 + 2) + (3\cdot 7^2 + 2\cdot 7 + 2) + (3\cdot 8^2 + 2\cdot 8 + 2) + (3\cdot 9^2 + 2\cdot 9 + 2)) \approx$$

$$= 1(2 + 7 + 18 + 35 + 58 + 87 + 122 + 163 + 210 + 263) = 965$$

Из других методов приближенного интегрирования следует отметить *метод парабол*, который также называют *методом Симпсона*.
Его суть заключается в том, что отрезки прямых, ограничивающих элементарные трапеции сверху, заменяют дугами парабол, оси которых параллельны оси *Oy*.
В курсе математического анализа выводится формула

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{3n}(y_0 + y_n + 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{n-2}) + 4(y_1 + y_3 + \ldots + y_{n-1})),$$

где n – четное число.
Применение этой формулы значительно повышает точность вычисления определенного интеграла.

Пример 31.

Вычислить по формуле Симпсона интеграл $\int_1^4 x^2 dx$.

Решение:

разобьем отрезок интегрирования на 10 равных частей, тогда $(b-a)/3n=3/30=1/10=0{,}1$

Подставляя в подынтегральную функцию $y=x^2$ значения аргумента

$$x_0=1;\ x_1=1{,}3;\ x_2=1{,}6,\ \ldots,\ x_{10}=4,$$

найдем соответствующие значения ординат:

$$y_0=1;\ y_1=1{,}69;\ y_2=2{,}56;\ y_3=3{,}61;\ y_4=4{,}84;$$
$$y_5=6{,}25;\ y_6=7{,}84;\ y_7=9{,}61;\ y_8=11{,}56;\ y_9=13{,}69;\ y_{10}=16.$$

Применяя формулу

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{3n}(y_0 + y_n + 2(y_2 + y_4 + ... + y_{n-2}) + 4(y_1 + y_3 + ... + y_{n-1}))$$

получим

$$\int_1^4 x^2 dx = 0{,}1((1+16)+2(2{,}56+4{,}84+7{,}84+11{,}56)+$$

$$+4(1{,}69+3{,}61+6{,}25+9{,}61+13{,}69))=21$$

План работы:

1 вариант 1) Вычислить объем тела, полученного от вращения вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями: $y = x^2 - 2x + 2,\ \ x = -1,\ \ x = 2$ 2) Вычислить приближенно интеграл $\int_{-1}^{5}(x^2 - 2)dx$ по формуле прямоугольников при n=6	**2 вариант** 1) Вычислить объем тела, полученного от вращения вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями: $y = \frac{1}{x},\ \ x = 1,\ \ x = 3$ 2) Вычислить приближенно интеграл $\int_0^8 \sqrt{x}dx$ по формуле прямоугольников при n=8
3 вариант 1) Вычислить объем тела, полученного от вращения вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями: $y = 4x - x^2,\ \ x = 1,\ \ x = 4$ 2) Вычислить приближенно интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ по формуле прямоугольников при n=10 с точностью до 0,01.	**4 вариант** 1) Вычислить объем тела, полученного от вращения вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями: $y = -x^2 - 1,\ \ x = 1,\ \ x = 4$ 2) Вычислить приближенно интеграл $\int_0^8 (3x^2 - 4x + 1)dx$ по формуле трапеций при n=8
5 вариант 1) Вычислить объем тела, полученного от вращения вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями: $y = -x^2 + 2x - 2,\ \ x = -1,\ \ x = 2$ 2) Вычислить приближенно	**6 вариант** 1) Вычислить объем тела, полученного от вращения вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями: $y = -\frac{1}{x},\ \ x = 1,\ \ x = 3$ 2) Вычислить приближенно

интеграл $\int_{-1}^{5}(2x^2+1)dx$ по формуле трапеций при n=6	интеграл $\int_{1}^{2}\frac{dx}{x}$ по формуле трапеций при n=10 с точностью до 0,0001.

Контрольные вопросы:

1) Дайте определение определенного интеграла. Запишите формулу Ньютона-Лейбница.
2) План вычисления площади плоской фигуры
3) Как вычисляется объем тела вращения?
4) Приведите примеры приближенных вычислений определенных интегралов.

Литература: [1, §47, с.424-428]

Практическая работа №7

«Численное дифференцирование. Формулы приближенного дифференцирования, основанные на интерполяционных формулах Ньютона. Погрешность в определении производной»

Цель работы:

уметь:

- вычислять приближенно изменение функции при изменении аргумента;
- определять абсолютную и относительную погрешности вычисления;
- производить вычисления с заданной точностью.

Необходимые для выполнения работы знания:

студент должен:

знать:

- понятие дифференциала функции;
- формулы для вычисления абсолютной и относительной погрешностей.

Сведения из теории:

Рассмотрим вопрос об использовании дифференциалов в приближенных вычислениях.

Из формулы приращения функции: $\Delta y = dy + \alpha\Delta x$, где Δy - приращение функции, dy - дифференциал функции. А $\alpha \to 0$ при $x \to 0$, это позволяет сделать вывод о том, что $\Delta y \approx dy$, т.е. приближенное значение приращения функции совпадает с её дифференциалом.

Приближенное значение приращения функции

Пример 32.

Пользуясь понятием дифференциала функции, вычислить приближенно изменение функции $y=x^3-7x^2+80$ при изменении аргумента x от 5 до 5,01.

Решение:

находим $\Delta y \approx dy = y'\Delta x = (3x^2 - 14x)\Delta x$

При x=5, $\Delta x = 5{,}01 - 5 = 0{,}01$ получим

$$\Delta y\Big|_{\substack{x=5 \\ \Delta x=0{,}01}} = (3\cdot 5^2 - 14\cdot 5)0{,}01 = 0{,}05$$

Вычисление погрешности приближенного приращения функции

Пример 33.

Найти приближенно приращение функции $y=3x^2+2$ при x=2, $\Delta x = 0{,}001$.

Определить абсолютную и относительную погрешности вычисления.

Решение:

т.к. приращение аргумента величина малая, то приращение функции можно заменить её дифференциалом:

$$\Delta y \approx dy\Big|_{\substack{x=2 \\ \Delta x=0{,}001}} = 6xdx\Big|_{\substack{x=2 \\ \Delta x=0{,}001}} = 6\cdot 2\cdot 0{,}001 = 0{,}012$$

Найдем ошибку, полученную при замене приращения функции её дифференциалом. Для этого вычислим точное значение приращения функции:

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x).$$

$$\Delta y = 3(x+\Delta x)^2 + 2 - (3x^2+2) = 3x^2 + 6x\Delta x + 3(\Delta x)^2 + 2 - 3x^2 - 2 = 6x\Delta x + 3(\Delta x)^2$$

$$dy\Big|_{\substack{x=2 \\ \Delta x=0{,}001}} = 6\cdot 2\cdot 0{,}001 + 3\cdot 0{,}000001 = 0{,}0120003$$

Сравнивая точное значение Δy с приближенным, видим, что абсолютная погрешность есть $\Delta = |\Delta y - dy| = 0{,}000003$.

Относительная погрешность составляет

$$\delta = \left|\frac{\Delta y - dy}{\Delta y}\right| = \frac{0{,}000003}{0{,}012003} \approx 0{,}00025 = 0{,}025\%$$

Вычисление приращения функции с заданной точностью

Пример 34.

С помощью дифференциала вычислить с точностью до 0,01 приращение функции $y = x\sqrt{x^2+5}$ при x=2, $\Delta x = 0{,}2$.

Решение:

находим дифференциал данной функции

$$dy = y'dx = (\sqrt{x^2+5} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2+5}})dx$$

При x=2, $\Delta x = 0{,}2$ получим

$$\Delta y \approx dy\Big|_{\substack{x=2 \\ dx=0{,}2}} = (\sqrt{4+5} + \frac{4}{\sqrt{4+5}})0{,}2 \approx 0{,}866 \approx 0{,}87$$

План работы:

1 вариант 1) Как приближенно изменится значение функции $y=\frac{1}{3}x^3+x^2-5$ при изменении аргумента x от 3 до 3,1? 2) Найти абсолютную и относительную погрешности при замене приращения функции $y=x^3+2x$ её дифференциалом в точке x=2 при $\Delta x=0{,}1$. 3) С помощью дифференциала вычислить с точностью до 0,001 приращение функции $y=\sqrt[3]{x^2}$ при x=1, $\Delta x=0{,}2$.	**2 вариант** 1) Как приближенно изменится значение функции $y=3x^2+5x+1$ при изменении аргумента x от 3 до 3,001? 2) Найти абсолютную и относительную погрешности при замене приращения функции $y=x^2-2x$ её дифференциалом в точке x=1 при $\Delta x=0{,}01$. 3) С помощью дифференциала вычислить с точностью до 0,001 приращение функции $y=\sqrt[3]{x^2}+4x$ при x=1, $\Delta x=0{,}01$.
3 вариант 1) Как приближенно изменится значение функции $y=-\frac{1}{3}x^3+2x^2-5$ при изменении аргумента x от 3 до 3,1? 2) Найти абсолютную и относительную погрешности при замене приращения функции $y=-x^3+x$ её дифференциалом в точке x=3 при $\Delta x=0{,}1$. 3) С помощью дифференциала вычислить с точностью до 0,001 приращение функции $y=\sqrt[3]{1-x^2}$ при x=1, $\Delta x=0{,}2$.	**4 вариант** 1) Как приближенно изменится значение функции $y=\frac{1}{2}x^3-x^2$ при изменении аргумента x от 1 до 1,1? 2) Найти абсолютную и относительную погрешности при замене приращения функции $y=x^3+x$ её дифференциалом в точке x=5 при $\Delta x=0{,}1$. 3) С помощью дифференциала вычислить с точностью до 0,01 приращение функции $y=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$ при x=1, $\Delta x=0{,}2$.
5 вариант 1) Как приближенно изменится значение функции $y=x^3+\frac{1}{2}x^2-5$ при изменении аргумента x от 2 до 2,1? 2) Найти абсолютную и относительную погрешности при замене приращения функции $y=\frac{x^3}{2}+2x$ её дифференциалом в	**6 вариант** 1) Как приближенно изменится значение функции $y=x^3+x^2$ при изменении аргумента x от 1 до 1,1? 2) Найти абсолютную и относительную погрешности при замене приращения функции $y=\frac{1}{3}x^3+2x$ её дифференциалом в точке x=3 при $\Delta x=0{,}1$. 3) С помощью дифференциала

точке x=2 при $\Delta x = 0{,}01$. 3) С помощью дифференциала вычислить с точностью до 0,01 приращение функции $y = 2 - \sqrt[3]{x^2}$ при x=1, $\Delta x = 0{,}01$.	вычислить с точностью до 0,01 приращение функции $y = \sqrt[3]{x} - 1$ при x=8, $\Delta x = 0{,}1$.

Контрольные вопросы:

1. Что называется дифференциалом функции, чему он равен, как обозначается и каков его геометрический смысл?
2. Чем можно оправдать, что при малых значениях Δx приращение функции приближенно равно её дифференциалу? Что выражает геометрически формула $\Delta y \approx dy$?

Литература: [4, с. 246, с. 249-251]

Практическая работа №8

«Построение интегральной кривой. Метод Эйлера. Нахождение значения функции с использованием метода Эйлера».

Цель работы:

уметь:

- владеть навыками решение дифференциальных уравнений при помощи формулы Эйлера

Необходимые для выполнения работы знания:

студент должен:

знать:

- последовательность вычисления значений функции методом Эйлера.

Сведения из теории:

Метод Эйлера

Дифференциальное уравнение $y'=f(x, y)$ определяет на плоскости так называемое поле направлений, т. е. определяет в каждой точке плоскости, в которой существует функция $f(x, y)$, направление интегральной кривой уравнения, проходящей через эту точку. Допустим, что требуется решить задачу Коши, т. е. найти решение уравнения $y'=f(x, y)$, удовлетворяющее начальным условиям $y(x_0)=y_0$. Разделим отрезок $[x_0, X]$ на n равных частей и положим

$$\frac{X - x_0}{n} = h, \ \ где\left(X = x_0 + n \cdot h, \ h - шаг \ изменения \ аргумента\right)$$

Допустим, что внутри элементарного промежутка от x_0 до x_0+h функция y' сохраняет постоянное значение $f(x_0, y_0)$.

Тогда имеем

$$y_1 - y_0 \approx h \cdot f(x_0,\ y_0),$$

где y_1 – значение искомой функции, соответствующее значению $x_1 = x_0 + h$. Отсюда получаем

$$y_1 \approx y_0 + h \cdot f(x_0,\ y_0)$$

Повторяя эту операцию, получим последовательные значения функции:

$y_2 \approx y_1 + h \cdot f(x_1,\ y_1),$

$y_3 \approx y_2 + h \cdot f(x_2,\ y_2),$

$y_4 \approx y_3 + h \cdot f(x_3,\ y_3),$

....

$y_{k+1} \approx y_k + h \cdot f(x_k,\ y_k)$

Таким образом, мы можем приближенно построить интегральную кривую в виде ломаной с вершинами M_k (x_k; y_k), где

$$x_{k+1} = x_k + \Delta x_k,\ \ y_{k+1} = y_k + h \cdot f(x_k,\ y_k)$$

Этот метод называется *методом ломаной Эйлера*, или просто *методом Эйлера*.

Пример №35.

Найти, используя метод Эйлера, значения функции y, определяемой дифференциальным уравнением $y' = \dfrac{y-x}{y+x}$ при начальных условиях $y(0)=1$, принимая $h=0,1$. Ограничиться отысканием первых четырех значений y.

Решение:

при $h=0,1$ последовательные значения аргумента будут: $x_0=0$, $x_1=0,1$, $x_2=0,2$, $x_3=0,3$, … .

Вычислим соответствующие значения искомой функции:

$y_1 \approx y_0 + h \cdot f(x_0,\ y_0) = 1 + 0,1 \cdot \dfrac{1-0}{1+0} = 1,1$

$y_2 \approx y_1 + h \cdot f(x_1,\ y_1) = 1,1 + 0,1 \cdot \dfrac{1,1-0,1}{1,1+0,1} = 1,183,$

$y_3 \approx y_2 + h \cdot f(x_2,\ y_2) = 1,183 + 0,1 \cdot \dfrac{1,183-0,2}{1,183+0,2} = 1,254,$

$y_4 \approx y_3 + h \cdot f(x_3,\ y_3) = 1,254 + 0,1 \cdot \dfrac{1,254-0,3}{1,254+0,3} = 1,315,$

....

Таким образом, получаем таблицу:

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4
y	1	1,1	1,183	1,254	1,315

По полученной таблице значений строим интегральную кривую в прямоугольной декартовой системе координат.

Пример №36.

Найти, используя метод Эйлера, значения функции *y*, определяемой дифференциальным уравнением $y' = x + y$ при начальных условиях $y(0)=1$, принимая $h=0{,}1$. Ограничиться отысканием первых четырех значений *y*.

Решение:

при $h=0{,}1$ последовательные значения аргумента будут:

$$x_0=0,\ x_1=0{,}1,\ x_2=0{,}2,\ x_3=0{,}3,\ \ldots .$$

Вычислим соответствующие значения искомой функции:

$$y_1 \approx y_0 + h \cdot f(x_0,\ y_0) = 1 + 0.1 \cdot (0+1) = 1{,}1$$

$$y_2 \approx y_1 + h \cdot f(x_1,\ y_1) = 1{,}1 + 0{,}1 \cdot (0{,}1 + 1{,}1) = 1{,}22,$$

$$y_3 \approx y_2 + h \cdot f(x_2,\ y_2) = 1{,}22 + 0{,}1 \cdot (0{,}2 + 1{,}22) = 1{,}36,$$

$$y_4 \approx y_3 + h \cdot f(x_3,\ y_3) = 1{,}36 + 0{,}1 \cdot (0{,}3 + 1{,}36) = 1{,}52,$$

....

Таким образом, получаем таблицу:

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4
y	1	1,1	1,22	1,36	1,52

По полученной таблице значений строим интегральную кривую в прямоугольной декартовой системе координат.

План работы:

Вариант 1 Методом Эйлера постройте таблицу значений для заданного дифференциального уравнения с начальным условием y(0)=1. В таблице укажите значение решения на отрезке [0, 1] с шагом 0,1. По таблице постройте график решения. $y' = xy - y^2$.	**Вариант 2** Методом Эйлера постройте таблицу значений для заданного дифференциального уравнения с начальным условием y(0)=1. В таблице укажите значение решения на отрезке [0, 1] с шагом 0,1. По таблице постройте график решения. $y' = x^2 + y^2$.
Вариант 3 Методом Эйлера постройте таблицу значений для заданного дифференциального уравнения с начальным условием y(0)=1. В таблице укажите значение решения на отрезке [0, 1] с шагом 0,1. По таблице постройте график решения. $y' = x^2 - y^2$.	**Вариант 4** Методом Эйлера постройте таблицу значений для заданного дифференциального уравнения с начальным условием y(0)=1. В таблице укажите значение решения на отрезке [0, 1] с шагом 0,1. По таблице постройте график решения. $y' = 2x - 0{,}1y^2$.
Вариант 5 Методом Эйлера постройте таблицу значений для заданного	**Вариант 6** Методом Эйлера постройте таблицу

дифференциального уравнения с начальным условием y(0)=1. В таблице укажите значение решения на отрезке [0, 1] с шагом 0,1. По таблице постройте график решения. $y' = x^2 - 2y$.	значений для заданного дифференциального уравнения с начальным условием y(0)=1. В таблице укажите значение решения на отрезке [0, 1] с шагом 0,1. По таблице постройте график решения. $y' = 2x - y^2$

Контрольные вопросы:

1. Что называют шагом разбиения сегмента?

2. Как выглядит алгоритм решения дифференциальных уравнений при помощи формул Эйлера?

3. Что называют интегральную кривую и ломаные Эйлера?

Литература: [7, с. 405-407]

Практическая работа №9

«Решение простейших задач на определение вероятности с использованием теоремы сложения вероятностей. Формула полной вероятности».

Цель работы:

уметь:

- по условию задачи различать виды соединений;
- вычислять разные виды соединений;
- вычислять вероятность событий.

Необходимые для выполнения работы знания:

студент должен:

знать:

- определение соединений, их видов;
- определение вероятности;
- теоремы сложения, умножения вероятностей.

Сведения из теории:

Соединения, их виды

Группы, составленные из каких – либо элементов, называются *соединениями*.

Различаю три основных вида соединений: *размещения, перестановки и сочетания*.

Размещениями из n элементов по m в каждом называются такие соединения, которые отличаются друг от друга либо самими элементами, либо порядком их расположения.

Число размещений из n элементов по m обозначается и вычисляется по формуле:

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)...[n-(m-1)]$$

Перестановками из n элементов называются такие соединения из всех n элементов, которые отличаются друг от друга порядком расположения элементов.

Перестановки представляют частный случай размещений из n элементов по n в каждом.

Число всех перестановок из n элементов равно произведению последовательных чисел от 1 до n включительно:

$$P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot (n-1)n,$$

$n!$-читается «n-факториал», причем 0!=1 и 1!=1.

Используя приведенные выше определения имеем формулы:

$$A_n^m = \frac{P_n}{P_{n-m}} = \frac{n!}{(n-m)!},$$

при решении задач часто используется равенство:

$$A_n^{m+1} = (n-m)A_n^m.$$

Сочетаниями из n элементов по m в каждом называются такие соединения, которые отличаются друг от друга хотя бы одним элементом.

Число сочетаний из n элементов по m обозначается и вычисляется по формуле:

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_n^m},$$

которую можно записать также в виде

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

или

$$C_n^m = \frac{n(n-1)...[n-(m-1)]}{m!}.$$

Кроме того, при решении задач используются следующие формулы, выражающие основные свойства сочетаний:

$$C_n^m = C_n^{n-m} \ (0 \le m \le n), \ \ C_n^n = 1; \ \ C_n^0 = 1; \ \ C_n^m + C_n^{m+1} = C_{n+1}^{m+1}$$

Пример 37.

Найти число размещений из 10 элементов по 4.

Решение:

$$A_{10}^4 = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040$$

Пример 38.

Решить уравнение: $A_n^5 = 30A_{n-2}^4$.

Решение:

используя формулу для вычисления числа размещений имеем:

$$n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4) = 30(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)$$

Разделим обе части на одинаковые выражения, получим:

$$n(n-1)=30(n-5),$$

и решим получившееся квадратное уравнение: $n_1=6,\ \ n_2=25$

Пример 39.

Решите систему: $\begin{cases} C_x^y = C_x^{y+2} \\ C_x^2 = 66 \end{cases}$.

Решение:

решим второе уравнение:

$$C_x^2=66 \Rightarrow \frac{x(x-1)}{1\cdot 2}=66$$

$$x^2-x-132=0$$

$$x_1=-11,\ \ x_2=12$$

Т. к. $x>2$, то –11 не удовлетворяет условию задачи. Подставив x=12 в первое уравнение системы, получим

$$C_{12}^y = C_{12}^{y+2}.$$

Используя основное свойство сочетаний, имеем:

$$C_{12}^y = C_{12}^{12-y},$$

тогда

$$C_{12}^{12-y} = C_{12}^{y+2} \Rightarrow 12-y=y+2 \Rightarrow y=5.$$

Ответ: x=12, y=5.

Пример 40.

Сколькими способами из восьми кандидатов можно выбрать три лица на три должности?

Решение:

условию задачи соответствуют размещения, имеем:

$$A_8^3 = 8\cdot 7\cdot 6 = 336$$

Случайные события

Изучение каждого явления в порядке наблюдения или производства опыта связано с осуществлением некоторого комплекса условий (испытаний).

Всякий результат или исход испытания называется *событием*.

Если событие при заданных условиях может произойти или не произойти, то оно называется *случайным*.

В том случае, когда событие должно непременно произойти, его называют *достоверным*, а в том случае, когда оно заведомо не может произойти, *невозможным*.

События называются *несовместными*, если каждый раз возможно появление только одного из них. События называются *совместными*, если в данных условиях появление одного из этих событий не исключает появление другого при том же испытании.

События называются *противоположными*, если в условиях испытания они, являясь единственными его исходами, несовместны.

Вероятность события рассматривается как мера объективной возможности появления случайного события.

Классическое определение вероятности.

Вероятностью события А называется отношение числа благоприятных исходов m, к числу всех возможных исходов n:

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

Вероятность любого события не может быть меньше нуля и больше единицы, т. е. $0 \le P(A) \le 1$.

Невозможному событию соответствует вероятность P(A)=0, а достоверному – вероятность P(A)=1.

Пример 41.

В лотерее из 1000 билетов 200 выигрышных. Вынимают наугад один билет. Какова вероятность, что этот билет выигрышный?

Решение:

Количество благоприятных событий, удовлетворяющих условию задачи m=200

Число всех возможных вариантов n=1000

По определению вероятности: P(A)=200/1000=0,2.

Пример 42.

Из урны, в которой находятся 5 белых и 3 черных шара, вынимают один шар. Найти вероятность того, что этот шар черный?

Решение:

общее число шаров m=8, из них черных n=3, по определению: P(A)=3/8=0,375.

Пример 43.

Из урны, в которой находятся 12 белых и 8 черных шара, вынимают наудачу два шара. Найти вероятность того, что оба шара окажутся черными?

Решение:

общее число возможных случаев n равно числу сочетаний из 20 (12+8) элементов по два:

$$n = C_{20}^{2} = \frac{20 \cdot 19}{1 \cdot 2} = 190$$

число благоприятных исходов m равно числу сочетаний из 8 элементов по два:

$$n = C_{8}^{2} = \frac{8 \cdot 7}{1 \cdot 2} = 28$$

По определению: P(A)=28/190=0,147.

Пример 44.
В партии из 18 деталей находятся 4 бракованных. Наугад выбирают 5 деталей. Какова вероятность того, что из этих 5 деталей две окажутся бракованными?
Решение:
число всех равновозможных независимых исходов *n* равно числу сочетаний из 18 по 5:

$$n = C_{18}^{5} = \frac{18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 8568$$

подсчитаем число благоприятных исходов *m*. Среди 5 взятых наугад деталей должно быть 3 качественных и 2 бракованных. Число способов выборки двух бракованных деталей из 4 имеющихся бракованных равно числу сочетаний из 4 по 2:

$$C_{4}^{2} = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 6$$

число способов выборки трех качественных деталей из 14 имеющихся равно числу сочетаний из 14 по 3:

$$C_{14}^{3} = \frac{14 \cdot 13 \cdot 12}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 364$$

любая группа качественных деталей может комбинироваться с любой группой бракованных, поэтому общее число комбинаций *m* равно:

$$m = C_{4}^{2} \cdot C_{14}^{3} = 6 \cdot 364 = 2184$$

по определению: P(A)=2184/8568=0,255.

Вероятность несовместных событий
Вероятность появления одного из нескольких попарно несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий: P(A+B)=P(A)+P(B)

Пример 45.
В ящике в случайном порядке разложены 20 деталей, причем пять из них стандартные. Рабочий берет наудачу три детали. Найти вероятность того, что, по крайней мере, одна из взятых деталей окажется стандартной (событие А).
Решение:
очевидно, что, по крайней мере, одна из взятых деталей окажется стандартной, если произойдет любое из трех несовместных событий: В – одна деталь стандартная, две нестандартные; С – две детали стандартные, одна нестандартная; Д – три детали стандартные.
Т.о., событие А можно представить в виде суммы этих трех событий: А=В+С+Д.
Тогда Р(А)=Р(В)+Р(С)+Р(Д).
Вычислим вероятность каждого события:

$$P(B) = \frac{C_{5}^{1} \cdot C_{5}^{2}}{C_{20}^{3}} = \frac{5 \cdot 15 \cdot 14}{1 \cdot 1 \cdot 2} = \frac{35}{76}$$

$$P(C)=\frac{C_5^2\cdot C_{15}^1}{C_{20}^3}=\frac{5\cdot 4\cdot 15\cdot 1\cdot 2\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 1\cdot 20\cdot 19\cdot 18}=\frac{5}{38}$$

$$P(Д)=\frac{C_5^3}{C_{20}^3}=\frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 1\cdot 2\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 20\cdot 19\cdot 18}=\frac{1}{114}$$

Итак,

$$P(A)=\frac{35}{76}+\frac{5}{38}+\frac{1}{114}=\frac{137}{228}=0{,}601$$

Вероятность совместных событий

Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления: P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)

Пример 46.

Найти вероятность того, что наудачу взятое двузначное число окажется кратным либо 3, либо 5, либо тому и другому одновременно?

Решение:

А – число кратно 3, В – число кратно 5. Всего имеется 90 двузначных чисел: 10, 11, …, 98, 99. Из них 30 – кратные 3, 18 – кратные 5 и шесть чисел одновременно кратны и 3 и 5, поэтому:

$$P(A)=\frac{30}{90}=\frac{1}{3},\ P(B)=\frac{18}{90}=\frac{1}{5},\ P(AB)=\frac{6}{90}=\frac{1}{15}$$

Т.к. А и В совместные события, то по формуле имеем:

$$P(A)=\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{15}=\frac{7}{15}=0{,}467$$

План работы:

№1. Решить следующие задачи, используя определение сочетаний, их видов:

1 вариант	**2 вариант**
1) Сколько двузначных чисел можно составить из цифр 1, 3, 5, 8, 9 так, чтобы в каждом числе не было одинаковых цифр? 2) Из 6 открыток надо выбрать 3. Сколькими способами это можно сделать? 3) Решите уравнение: $A_x^3=\frac{1}{20}A_x^4$	1) Сколькими способами могут разместиться 5 человек вокруг круглого стола? 2) Сколькими способами можно составить флаг, состоящий из трех горизонтальных полос различных цветов, если имеется материал семи различных цветов? 3) Решите уравнение: $30x=A_x^3$

3 вариант 1) Из 10 кандидатов нужно выбрать 3 человека на конференцию. Сколькими различными способами это можно сделать? 2) Сколько различных пятизначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 3, 5, 7 так, чтобы в каждом числе не было одинаковых цифр? 3) Решите уравнение: $30A_{x-2}^{4}=A_{x}^{5}$	**4 вариант** 1) Бригадир должен отправить на работу бригаду из 3 человек. Сколько таких бригад можно составить из 8 человек? 2) На собрании должны выступить 5 человек (А, Б, В, Г, Д). Сколькими способами их можно разместить в списке выступающих, если А должен выступать первым? 3) Решите уравнение: $20A_{x-2}^{3}=A_{x}^{5}$
5 вариант 1) Сколькими способами можно расставить на полке 6 книг? 2) Сколькими способами можно выбрать гласную и согласную буквы из слова «журнал»? 3) Решите уравнение: $\frac{x}{A_{x}^{3}}=\frac{1}{12}$	**6 вариант** 1) Сколькими способами можно составить список из 6 человек? 2) Сколькими способами собрание, состоящее из 18 человек, может из своего состава выбрать председателя собрания и секретаря? 3) Решите уравнение: $4C_{x+2}^{x-1}=A_{x}^{3}$

№2. Решить следующие задачи, используя определение вероятности, формулы сложения вероятностей:

1 вариант 1) Какова вероятность того, что наудачу выбранное целое число от 40 до 70 является кратным 6? 2) Какова вероятность того, что при пяти бросаниях монеты она три раза упадет гербом кверху? 3) Имеется три урны с шарами. В первой находится 6 белых и 4 черных шара, во второй - 5 белых и 5 черных, а в третьей – 6 белых шаров. Выбирают наугад одну из урн и вынимают из нее один шар. Найти вероятность того, что этот шар белый?	**2 вариант** 1) Какова вероятность того, что наудачу выбранное целое число от 1 до 30 (включительно) является делителем числа 30? 2) В НИИ работает 120 человек, из них 70 знают английский язык, 60 – немецкий, 50 – знают оба. Какова вероятность того, что выбранный наудачу сотрудник не знает ни одного иностранного языка? 3) В урне 8 черных, 6 красных и 4 белых шара. Последовательно вынимается три шара. Найти вероятность того, что первый шар окажется черным, второй – красным, третий – белым?
3 вариант 1) В ящике в случайном порядке разложены 10 деталей, из них 4	**4 вариант** 1) Из 5 букв разрезной азбуки составлено слово «книга». Ребенок,

стандартные. Контролер взял наудачу 3 детали. Найдите вероятность того, что хотя бы одна из взятых деталей стандартная. 2) Имеется 3 урны. В первой находится 5 белых шаров и 3 черных, во второй – 6 белых и 2 черных, в третьей – 10 белых шаров. Вынимают наугад один шар. Урна выбирается тоже наугад. Найти вероятность того, что этот шар белый? 3) Лотерейные билеты пронумерованы целыми числами от 1 до 200 включительно. Какова вероятность того, что номер наудачу взятого билета кратен 5 или 7?	не умеющий читать, рассыпал эти буквы, а затем собрал их в произвольном порядке. Найти вероятность того, что у него снова получится «книга»? 2) Талоны, свернутые в трубочку, занумерованы всеми двузначными числами. Наудачу берут один талон. Какова вероятность того, что номер взятого талона состоит из одинаковых цифр? 3) Группа туристов, состоящая из 12 юношей и 8 девушек, выбирает по жребию дежурную команду в составе 4 человек. Какова вероятность того, что в числе избранных окажется двое юношей и две девушки?
5 вариант 1) Найдите вероятность того, что наудачу взятое двузначное число окажется кратным либо 4, либо 5, либо тому и другому одновременно. 2) В коробке имеется 30 лотерейных билетов, из них 26 пустых (без выигрыша). Наугад вынимают одновременно 4 билета. Найдите вероятность того, что два из них окажутся выигрышными. 3) В урне находятся 10 белых, 15 черных, 20 синих и 25 красных шаров. Найдите вероятность того, что вынутый шар окажется черным.	**6 вариант** 1) В урне находятся 10 белых, 15 черных, 20 синих и 25 красных шаров. Найдите вероятность того, что вынутый шар окажется белым. 2) В коробке имеется 40 лотерейных билетов, из них 13 пустых (без выигрыша). Наугад вынимают одновременно 4 билета. Найдите вероятность того, что хотя бы один из них окажутся выигрышными. 3) Считая выпадение любой грани игральной кости одинаково вероятным, найдите вероятность выпадения грани с нечетным числом очков.

Контрольные вопросы:

1. Дайте определение соединения, их виды?
2. Приведите формулы для вычисления разных видов соединений.
3. Дайте определение случайного события, их виды. Приведите примеры.
4. Дайте классическое определение вероятности.
5. Сформулируйте теоремы сложения, умножения вероятностей.

Литература: [5, с. 234-238]

Практическая работа №10
« Случайная величина. Дискретная и непрерывная случайная величины. Закон распределения случайной величины»
Цель работы:
уметь:

- строить многоугольник (полигон) распределения дискретной случайной величины;
- составлять закон распределения дискретной случайной величины;
- вычислять математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратичное отклонение дискретной случайной величины.

Необходимые для выполнения работы знания:
студент должен:
знать:

- определение дискретной случайной величины;
- формулы для вычисления математического ожидания, дисперсии, среднего квадратичного отклонения дискретной случайной величины.

Сведения из теории:
Случайное событие может состоять, в частности, в появлении некоторого числа, значение которого не может быть однозначно определено условиями его возникновение. Такие события называют случайными величинами. В этой трактовке мы сохраняем классический подход к понятию случайного события. Однако требование корректности в построении математических теорий заставляет нас вновь обратиться к аксиоматическому подходу, сохранив классические модели в качестве наглядных образцов из сферы практических приложений.
Математически корректно определить случайную величину как числовую функцию, заданную в пространстве элементарных событий.

Предположим вначале, что пространство элементарных событий является конечным множеством. Соответствующую ему случайную величину называют дискретной: она может принимать лишь конечное число значений, каждому из которых может быть сопоставлена вероятность его появления в опыте. Поэтому дискретные случайные величины можно задать таблицей вида:

X	X_1	X_2	…	Xn
P	P_1	P_2	…	Pn

Здесь буквой X обозначена случайная величина, X_1, X_2, ... Xn – перечень всех ее возможных значений, а P_1,... Pn – соответствующие им вероятности. Такую таблицу называют законом распределения дискретной случайной величины. События $X=x_i$ (i=1, 2, ,3, …, n) являются несовместными и единственно возможными, т. е. они образуют полную систему событий. Поэтому сумма их вероятностей равна единице: $p_1+p_2+p_3+\ldots+p_n=1$

Пример 47.
Разыгрываются две вещи стоимостью по 5 руб. и одна вещь стоимостью 30 руб. Составить закон распределения выигрышей для человека, купившего один билет из 50.
Решение:
искомая случайная величина X представляет собой выигрыш и может принимать значения: 0, 5, 30 руб. Первому результату благоприятствует 47 случаев, второму результату – 2 случая и третьему – 1 случай. Найдем их вероятности:

$$P(x_1)=47/50=0{,}94$$
$$P(x_2)=2/50=0{,}04$$
$$P(x_3)=1/50=0{,}02$$

Тогда закон распределения случайной величины имеет вид

X_i	0	5	30
p_i	0,94	0,04	0,02

В качестве проверки найдем $p_1+p_2+p_3+\ldots+p_n=0{,}94+0{,}04+0{,}02=1$
Случайные величины (дискретные и непрерывные) характеризуются своим законом распределения. Заметим, что это исчерпывающая характеристика в том смысле, что в законе распределения содержится вся информация о случайной величине. Никакой сколь угодно сложной математической обработкой наблюдаемых значений случайной величины о ней невозможно получить сведения, не содержащиеся в законе распределения. Однако этот закон часто неизвестен и о нем приходится судить на основе каких-то приближенных оценок. С другой стороны, для многих практических задач такая информация является избыточной: достаточно знать лишь некоторые количественные характеристики закона распределения.
Простейшей, но очень важной характеристикой является математическое ожидание.
Пусть, например, X - дискретная случайная величина распределена по закону:

X	X_1	X_2	…	Xn
P	P_1	P_2	…	Pn

Тогда ее *математическое ожидание M(X)* определяется равенством

$$M(X)=X_1P_1+X_2P_2+\ldots+XnPn$$

Обратим внимание на то, что хотя конкретные значения величины X являются случайными, математическое ожидание $M(X)$ случайным не является.
Пусть, например, испытание состоит в бросании игрального кубика. Поскольку выпадение каждой грани равновозможно, Pi = 1/6. Следовательно,

математическое ожидание числа выпавших очков равно $M(X) = 1/6(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 21/6 = 3{,}5$.
Число, близкое к этому, получится, если реально бросать кубик много раз и подсчитать сумму очков, деленную на число бросков.

Математическое ожидание и среднее арифметическое случайной величины - важные характеристики закона распределения, но, зная только их, мы имеем еще весьма одностороннее представление о нем. Не ясно, например, как велики могут быть отклонения значений величины от этих характеристик. Ведь одно и то же значение среднего арифметического наблюдаемых значений может получиться как в случае, когда все значения находятся вблизи среднего, так и в случае сколь угодно больших отклонений от него в сторону больших и меньших величин.
Для того чтобы характеризовать в среднем величины таких отклонений, вводится еще один важный параметр закона распределения, называемый дисперсией.
Дисперсией (рассеянием) дискретной случайной величины называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания:

$$D\{X) = M[X- M(X)]^2.$$

Так же дисперсию можно вычислить и по формуле:

$$D\{X) = M(X^2)- [M(X)]^2,$$

т. е. как разность математического ожидания квадрата значений случайной величины и квадрата её математического ожидания.
Дисперсия суммы двух независимых случайных величин равна сумме дисперсий этих величин:

$$D(X+Y) = D(X) + D(Y).$$

Многие случайные величины, встречающиеся на практике, имеют размерность. Например, величины, которые встречаются при различных измерениях. Тогда, если, скажем, случайная величина измеряется в метрах, то дисперсия будет иметь размерность м^2. Поэтому вводится еще одна характеристика, называемая *средним квадратическим отклонением*, обозначается: $\sigma = \sqrt{D(X)}$. ее размерность совпадает с размерностью случайной величины.

Пример 48.
Пусть X – число очков, выпадающих при одном бросании игральной кости. Найти дисперсию случайной величины X.
Решение:
случайная величина X – число очков принимает значения 1, 2, 3, 4, 5, 6.
Составим закон её распределения:

X_i	1	2	3	4	5	6
P_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Тогда её математическое ожидание

$$M(X)= 1\cdot\frac{1}{6}+2\cdot\frac{1}{6}+3\cdot\frac{1}{6}+4\cdot\frac{1}{6}+5\cdot\frac{1}{6}+6\cdot\frac{1}{6}=3{,}5$$

Найдем отклонения для $x_1, x_2, \ldots, x_6$:

$$x_1^0=1-3{,}5;\ x_2^0=2-3{,}5;\ x_3^0=3-3{,}5;\ x_4^0=4-3{,}5;\ x_5^0=5-3{,}5;\ x_6^0=6-3{,}5;$$

Вычислим дисперсию:

$$D(X)=\frac{1}{6}((1-3{,}5)^2+(2-3{,}5)^2+(3-3{,}5)^2+(4-3{,}5)^2+(5-3{,}5)^2+(6-3{,}5)^2)=\frac{35}{12}$$

План работы:

№1. Выполните действия:

<table>
<tr>
<td>

1 вариант

1) Построить многоугольник (полигон) распределения дискретной случайной величины *X*, заданной законом распределения:

X	2	4	5	6
p	0,3	0,1	0,2	0,4

Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

2) Стрелок делает по мишени три выстрела. Вероятность попадания в мишень при каждом выстреле равна 0,3. Построить ряд распределения числа попаданий.

</td>
<td>

2 вариант

1) Построить многоугольник (полигон) распределения дискретной случайной величины *X*, заданной законом распределения:

X	10	15	20
p	0,1	0,7	0,2

Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

2) Составить таблицу распределения вероятностей случайного числа очков, выпавшего на верхней грани игрального кубика при одном подбрасывании.

</td>
</tr>
<tr>
<td>

3 вариант

1) Построить многоугольник (полигон) распределения дискретной случайной величины *X*, заданной законом распределения:

X	10	20	30	40
p	0,3	0,1	0,2	0,4

Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

2) Игральную кость бросают дважды. Случайная величина X – сумма очков при обоих подбрасываниях. Составить таблицу распределения

</td>
<td>

4 вариант

1) Построить многоугольник (полигон) распределения дискретной случайной величины *X*, заданной законом распределения:

X	5	10	15	20
p	0,1	0,3	0,2	0,4

Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

2) В коробке находятся 7 карандашей, из которых 4 – красные. Наудачу берут три карандаша. Какой закон распределения имеет случайная

</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>вероятностей.</td>
<td>величина, означающая число извлеченных красных карандашей?</td>
</tr>
<tr>
<td>5 вариант
1) Построить многоугольник (полигон) распределения дискретной случайной величины X, заданной законом распределения:
<table>
<tr><td>X</td><td>2</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr>
<tr><td>p</td><td>0,1</td><td>0,2</td><td>0,5</td><td>0,2</td></tr>
</table>
Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

2) В коробке находятся 9 карандашей, из которых 4 – синие. Наудачу берут три карандаша. Какой закон распределения имеет случайная величина, означающая число извлеченных синих карандашей?</td>
<td>6 вариант
1) Построить многоугольник (полигон) распределения дискретной случайной величины X, заданной законом распределения:
<table>
<tr><td>X</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr>
<tr><td>p</td><td>0,2</td><td>0,4</td><td>0,1</td><td>0,3</td></tr>
</table>
Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

2) Стрелок делает по мишени два выстрела. Вероятность попадания в мишень при каждом выстреле равна 0,3. Построить ряд распределения числа попаданий.</td>
</tr>
</table>

Контрольные вопросы:

1. Дайте определение случайного события.
2. Что называется случайной величиной?
3. Поясните закон распределения дискретной случайной величины.
4. Что называется математическим ожиданием дискретной случайной величины?
5. Что называется дисперсией дискретной случайной величины?

Литература: [6, с. 204-206, с. 214-218]

Литература

1) Математика для техникумов. Алгебра и начала анализа. Под ред. Г.Н.Яковлева – М.: Наука, 1987 – Часть1.
2) Математика для техникумов. Алгебра и начала анализа. Под ред. Г.Н.Яковлева – М.: Наука, 1987 – Часть2.
3) Математика для техникумов. Геометрия. Под ред. Г.Н.Яковлева –М.: Наука, 1989.
4) Лисичкин В.Т., Соловейчик И.Л. Математика: Учеб. пособие для техникумов. – М.: Высш.шк., 1991. – 480 с.: ил.
5) Богомолов Н.В. Практические занятия по математике: Учебное пособие для средних специальных учебных заведений. – М.: Высшая школа, 1997.
6) Математика: Учеб. для студ. образоват. учреждений сред. проф. образования/Игорь Дмитриевич Пехлецкий. – 2-е изд., стереотип. – М., Издательский центр «Академия», 2003. – 304 с.
7) Данко П.Е. и Попов А.Г. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч. II. Изд. 2-е. Учеб. пособие для втузов. М., «Высш. школа», 1974.