Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Норильский государственный индустриальный институт»
Политехнический колледж

МАТЕМАТИКА

Методические указания
к самостоятельным работам
для студентов образовательных учреждений
среднего профессионального образования
по специальности:

23.02.03 Подземная разработка месторождений полезных ископаемых

21.02.17 Шахтное строительство

13.02.01 Тепловые электрические станции

23.02.03 Техническое обслуживание и ремонт автомобильного транспорта

15.02.07 Автоматизация технологических процессов и производств (по отраслям)

1 курс

2020

УВАЖАЕМЫЙ СТУДЕНТ!

Методические указания по дисциплине «МАТЕМАТИКА» для выполнения самостоятельных работ созданы Вам в помощь для работы на занятиях, подготовки к ним. Приступая к выполнению самостоятельной работы, Вы должны внимательно прочитать цель и задачи занятия, ознакомиться с требованиями к уровню Вашей подготовки в соответствии с федеральными государственными образовательными стандартами третьего поколения, краткими теоретическими и учебно-методическими материалами по теме самостоятельной работы, ответить на вопросы для закрепления теоретического материала.

Внимание! Если в процессе подготовки к самостоятельным работам или при решении задач у Вас возникают вопросы, разрешить которые самостоятельно не удается, необходимо обратиться к преподавателю для получения разъяснений или указаний в дни проведения дополнительных занятий.

Время проведения дополнительных занятий можно узнать у преподавателя или посмотреть на двери его кабинета.

Желаем Вам успехов!

СОДЕРЖАНИЕ

19	8.1	Решение расчетных задач по теме "разложение на множители, введение новых переменных, подстановка	4
20	8.2	Составить таблицу "все решения линейных неравенств", графическое решение систем линейных неравенств с двумя переменными	4
21	9.1	Решение расчетных задач по теме «элементы комбинаторики»	3
22	9.2	Решение расчетных задач по теме «события, вероятность события»	4
23	9.3	Решение расчетных задач с применением вероятностных методов	4
24	10.1	Взаимное расположение двух прямых, прямой и плоскости в пространстве, построить в тетради всевозможные варианты	4
25	10.2	" Разобрать теорему о перпендикулярности двух плоскостей, выполнить в тетради чертеж, сделать соответствующие записи; решение задач на нахождение двугранных углов	4
26	11.1	Выполнение макетов из фигур (из бумаги, проволоки и др. материалов). Выполнение чертежей (А3) правильных многогранников(куб, тетраэдр, октаэдр)	10
27	12.1	Выполнение макетов фигур(цилиндр, конус, шар)	10
28	13.1	Решение задач на тему: объем и его измерение, интегральная формула объема	4
29	13.2	Решение расчетных задач, подготовка к письменному опросу	5
30	14.1	Решение расчетных задач, подготовка к устному, письменному опросу	4
31	14.2	Решение расчетных задач по теме «Векторы»	6
		Всего:	145

Самостоятельная работа №1

Оформление реферата по теме "Применение математики в производстве, экономике"

Структура реферата:

Реферат должен состоять из следующих частей: введения, основного текста, заключения и списка использованной литературы.

В введении должна быть указана актуальность темы и сформулированы те задачи, которые будут решаться в работе. Введение должно быть кратким (1-2 страницы).

В основной части излагается содержание темы.

Заключение содержит краткие выводы, которые излагаются на 1-2 страницах.

В конце реферата прилагается список литературы.

Этапы работы над рефератом:

1) подбор и изучение литературы;

2) составления плана работы;

3) собрание и обработка материала;

4) написание реферата;

5) защита реферата.

Самостоятельная работа №2

"Вычисления с помощью микрокалькуляторов. Вычисление значений выражений".

Цель работы:

уметь:

- производить вычисления на калькуляторе.

Студент должен:

знать:

- алгоритм вычислений на калькуляторе.

Сведения из теории:

Сложение приближенных значений чисел

Граница абсолютной погрешности суммы приближенных значений чисел равна сумме границ абсолютных погрешностей этих чисел:

$$\Delta(a+b)=\Delta a+\Delta b,$$

где a и b – приближенные значения чисел; Δa и Δb – границы абсолютных погрешностей соответствующих приближений.

Граница относительной погрешности сумы вычисляется по формуле:

$$\varepsilon_{a+b}=\frac{\Delta(a+b)}{a+b}.$$

Пример 1.

Найти сумму S приближенных значений чисел 6,8±0,05; 4,3±0,05 и 3,575±0,0005.

Решение:

S=6,8+4,3+3,575=14,675;

ΔS=0,05+0,05+0,0005=0,1005.

Граница абсолютной погрешности заключена в пределах 0,05<0,1005<0,5. В приближенном значении суммы верными являются лишь две цифры (в разрядах десятков и единиц). Полученный результат округлим до единиц S=14,675≈15.

Вычитание приближенных значений чисел

Граница абсолютной погрешности разности двух приближенных значений чисел равна сумме границ их абсолютных погрешностей:

$$\Delta(a-b)=\Delta a+\Delta b.$$

Граница относительной погрешности разности вычисляется по формуле:

$$\varepsilon_{a-b}=\frac{\Delta a+\Delta b}{a-b}.$$

Пример 2.

Вычислить разность двух приближенных значений чисел a=5,863±0,0005 и b=2,746±0,0005. Найти $\Delta(a-b)$ и ε_{a-b}.

Решение:

вычисляем границу абсолютной погрешности разности a-b: $\Delta(a-b)$=0,0005+0,0005=0,001.

В приближенном значении разности цифра в разряде тысячных не может быть верной, так как $\Delta(a-b)$>0,0005. Итак, a-b=3,117≈3,12. Абсолютная погрешность разности 0,001. В приближенном числе 3,12 все цифры верные. Находим относительную погрешность разности:

$$\varepsilon_{a-b}=\frac{0,001}{3,12}=0,00032\approx 0,03\%.$$

Умножение приближенных значений чисел

Формулы для оценки границ абсолютной погрешности произведения (частного) сложны, поэтому на практике сначала находят относительную погрешность произведения (частного), а затем границу абсолютной погрешности произведения (частного).

Пример 3.

Вычислить $X=\frac{a}{b+c}$, если известно, что a=7,2±0,05, b=3,46±0,03, c=5,09±0,04.

Решение:

находим $X=\frac{a}{b+c}=\frac{7,2}{3,46+5,09}=0,844$;

$$\varepsilon_X=\frac{\Delta X}{X}=\frac{\Delta a}{a}+\frac{\Delta b+\Delta c}{b+c}=\frac{0,05}{7,2}+\frac{0,03+0,04}{8,55}=0,015;$$

$\Delta X=X\cdot\varepsilon_X$=0,844·0,015=0,0127; X=0,844±0,0127 или $X\approx$0,84±0,01.

Задания для самостоятельного решения:

1) 6,54±0,005;

2) 16,022±0,0005

3) 1,9646±0,00005.

4) 0,456±0,0005

5) 3,35±0,005.

6) $\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{5}$ с тремя значащими цифрами.

Контрольные вопросы:

1) Какие обыкновенные дроби выражаются только приближенными десятичными?

2) Какие числа называются иррациональными и как обозначается множество иррациональных чисел?

3) Какие числа называются действительными и какое для них введено обозначение?

Литература:**[1, с. 8 - 15]**

Самостоятельная работа № 3

Составить таблицу "Виды комплексных чисел, их изображение на комплексной плоскости (частные случаи)

Цель работы:

уметь:

- изображать комплексное число на плоскости;

- производить вычисления над комплексными числами.

Студент должен:

знать:

- виды комплексных чисел;

- правила вычислений над комплексными числами в алгебраической и тригонометрической форме;

- частные случаи комплексных чисел.

Сведения из теории:

Определение.

Комплексными числами называются числа вида $z = a + bi$, где a и b - действительные числа, а число i, определяемое равенством $i^2 = -1$, называется мнимой единицей.

Для составления таблицы студенту необходимо знать:

формы комплексного числа и их формулы:

1) алгебраическая

2) тригонометрическая

3) показательная

изображение на координатной плоскости:

на оси OX изображаются действительные числа, на оси OY изображаются мнимые числа.

Контрольные вопросы:

1) Какие числа называются комплексными?

2) Какие виды комплексных чисел бывают?

3) Как изображаются комплексные числа на координатной оси?

Литература: **[1, с. 17 -19]**

Самостоятельная работа №4

"Преобразование и вычисление выражений, содержащих степени".

Цель работы:

уметь:

- вычислять действия со степенями;

- преобразовывать выражения.

Студент должен:

знать:

- правила действий со степенями;

- правила знаков;

-правила степеней.

Сведения из теории:

Справедливы следующие правила:

Чтобы возвести в степень произведение, нужно возвести в эту степень каждый сомножитель отдельно, а результаты перемножить:

$$(\boldsymbol{abc})^{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{a^n b^n c^n}.$$

Чтобы возвести в степень дробь, нужно возвести в эту степень числитель и знаменатель отдельно и первый результат разделить на второй:

$$\left(\boldsymbol{\frac{a}{b}}\right)^{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{\frac{a^n}{b^n}}\,.$$

Пример 4.

$(3ab)^2 = 9a^2b^2$.

Пример 5.

$\left(\frac{x^2y}{z^3}\right)^3 = \frac{x^6y^3}{z^9}$.

Правила знаков:

1) Любая степень положительного числа есть число положительное.

2) Чётная степень отрицательного числа есть число положительное.

3)Нечётная степень отрицательного числа есть число отрицательное.

Действия со степенями:

Правила действий со степенями:

1) При умножении степеней основание остаётся прежним, а показатели остаются складываются:

$$\boldsymbol{a^n \cdot a^n = a^{m+n}}.$$

Пример 6.

$a^3 \cdot a = a^{3+1} = a^4$.

2) При делении степеней основание остаётся прежним, а показатели степеней вычитаются:

$$\boldsymbol{a^m \div a^n = a^{m-n}}.$$

Пример 7.

$a^8 \div a^3 = a^5$.

3) При возведении степени в степень основание остаётся прежним, а показатели степеней перемножаются:

$$\boldsymbol{(a^m)^n = a^{mn}}.$$

Пример 8.

$(b^{-6})^3 = b^{-18}$.

4) При извлечении корня из степени основание остаётся прежним, а показатель степени делится на показатель корня:

$$\boldsymbol{\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}}.$$

Пример 9.

$\sqrt[5]{x^{15}} = x^{\frac{15}{5}} = x^3.$

Нулевой показатель степени:

Всякое число в нулевой степени равно единице (при $a = 1$).

$$\boldsymbol{a^0 = 1}.$$

Отрицательный показатель степени:

За степень с отрицательным показателем принимается дробь, числитель которой равен единице, а знаменатель - тому же числу, но с положительным показателем, равным абсолютной величине отрицательного показателя.

$$\boldsymbol{a^{-n} = \frac{1}{a^n}}.$$

Задания для самостоятельного решения:

1)$\sqrt[4]{a} \div a^{3/4}$

2) $4a^{1/2}x^{1/2} \cdot 5a^{1/3}x^{1/2}$

3) $20a^{-2}b^{1/2}c^{2/3} \div 4a^{-3}b^{1/2}c^{3/4}$

4) $\sqrt[3]{3a^2b} \div 4ab^3$

5) $\sqrt{a^{1/2}} \div \sqrt{a^{-1/3}}$

6)$32^{2/5} \cdot 0{,}5 - \left(\sqrt{25^3}\right)^0 - \left(-\frac{1}{5}\right)^{-2} + \left(\frac{2}{3}\right)^{-4} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{-3}$

7) $\left(\frac{1}{16}\right)^{-3/4} + 343^{1/3} + \left(\frac{1}{8}\right)^{-2/3} \cdot 0{,}81^{-0{,}5}$

Контрольные вопросы:

1) Перечислите правила степеней

2) Сформулируйте правила действий со степенями.

3) Перечислите правила знаков.

4) Чему равно число в нулевой степени?

Литература: **[1, с. 20-24]**

Самостоятельная работа № 5.

"Формула перехода от логарифма по одному основанию к логарифму по любому другому основанию".

Цель работы:

уметь:

Студент должен:

знать:

Сведения из теории:

Зависимость между логарифмами чисел при разных основаниях.

1) Формула перехода от логарифмов по основанию a к логарифмам по основанию b

$$\log_a M = \frac{\log_b M}{\log_b a}\ .$$

2) Зависимость между основаниями a и b выражается формулой:

$$\frac{1}{\log_a b} = \log_b a.$$

3) Имеет место соотношение:

$$\log_{a^m} M = \frac{1}{m}\log_a M$$

Пример 10.

Вычислить $x = \log_{125} 5$

Решение:

По формуле $\mathbf{\frac{1}{\log_a b} = \log_b a}$ находим

$x = \frac{1}{\log_5 125} = \frac{1}{3}$.

Пример 11.

Привести к основанию 2 $\log_{\sqrt{2}} x$

Решение:

$\log_{\sqrt{2}} x = \log_{2^{\frac{1}{2}}} x = 2\log_2 x$ (здесь применили формулу $\log_{a^m} M = \frac{1}{m}\log_a M$)

Задания для самостоятельного решения:

1) привести к основанию 5 $\log_{\sqrt{5}} x$

2) вычислить $\log_{625} 5$

3) вычислить $log_3 0{,}01$.

4) Вычислить $log_{0,8}16$.

Контрольные вопросы:

1) Напишите формулу перехода от логарифмов по основанию a к логарифмам по основанию b

2) Напишите зависимость между основаниями a и b.

Литература:[1, с. 115 - 117]

Самостоятельная работа №6.

"Преобразование выражений".

Цель работы:

уметь:

- преобразовывать выражения;

- выполнять действия над выражениями;

Студент должен:

знать:

- правила действий над степенями;

- правила логарифмов.

Сведения из теории:

Логарифмом числа b по основанию a называется показатель степени (x), в которую нужно возвести основание a, чтобы получить число b, т.е. $log_a b=x \rightarrow a^x=b$.

При работе с логарифмами применяются следующие их свойств, вытекающие из свойств показательной функции:

1 $a^{logab}=b$ (где $b>0$, $a>0$ и $a\neq0$) называют *основным логарифмическим тождеством*.

При любом $a>0$ ($a\neq0$) и любых положительных x и y выполняются равенства:

2 $log_a 1=0$.

3 $log_a a=1$.

4 Логарифм произведения равен сумме логарифмов: $log_a xy=log_a x+log_a y$.

5 Логарифм частного равен разности логарифмов: $log_a(x/y)=log_a x-log_a y$.

6 Логарифм степени равен произведению показателя степени на логарифм основания этой степени: $log_a x^k=klog_a x$.

Основные свойства логарифмов широко применяются в ходе преобразования выражений, содержащих логарифмы. Среди них формула перехода к новому основанию: $log_a x=log_b x/log_b a$. Эта формула верна, если обе ее части имеют смысл, т.е. при $x>0$, $a>0$ и $a\neq0$, $b>0$ и $b\neq1$).

По правилу логарифмирования степени и основному логарифмическому тождеству получаем:

$log_b x=log_b(a^{logax})$, откуда $log_b x=log_a x\times log_b a$. Эту формулу так же можно использовать для упрощения выражений.

Пример 11.

Вычислите: $(lg72-lg9)/(lg28-lg7)$.

Решение:

используя 5 и 6 свойства логарифмов, вычисляем

$$lg72-lg9=lg(72/9)=lg8=lg2^3=3lg2;$$

$$lg28-lg7=lg(28/7)=lg4=lg2^2=2lg2.$$

Итак,

$$(lg72-lg9)/(lg28-lg7)=(3lg2)/(2lg2)=3/2=1,5.$$

Уравнение, содержащее переменную в показателе, называется *показательным*.

При решении показательных уравнений вида $a^{f(x)}=a^{k(x)}$ (где $a>0$, $a\neq 0$) используется следующее свойство: $(a^{f(x)}=a^{k(x)})\to(f(x)=k(x))$.

Преобразование показательного уравнения к виду $a^{f(x)}=a^{k(x)}$ выполняется многими способами. Рассмотрим некоторые способы.

Пример 12.

Решите уравнение: $2^{x^2-7x+12}=1$.

Решение:

по определению нулевого показателя степени: $1=2^0$, получим: $2^{x^2-7x+12}=2^0$.

По свойству $(a^{f(x)}=a^{k(x)})\to(f(x)=k(x))$, получаем обычное квадратное уравнение, корни которого вычисляем через дискриминант:

$$x^2-7x+12=0,$$

$$x_1=3,\ x_2=4.$$

Ответ: 3, 4.

Преобразование алгебраических выражений, используя приведение дробей к общему знаменателю, формулы сокращенного умножения.

Формулы сокращенного умножения:

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b); \qquad (a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2;$$

$$a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2); \qquad (a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3;$$

где a, b, c – любые действительные числа;

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2),$$

где $a\neq 0$, x_1 и x_2 – корни уравнения $ax^2+bx+c=0$.

Основное свойство дроби и действия над дробями

$\frac{a\cdot c}{b\cdot c}=\frac{a}{b}=\frac{a:c}{b:c}$, где $b\neq 0$, $c\neq 0$; $\frac{a}{c}\pm\frac{b}{c}=\frac{a\pm b}{c}$;

$\frac{a}{c}\pm\frac{b}{d}=\frac{ad\pm bc}{cd}$; $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$; $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}$.

Пример 13.

Упростите: $\left(\frac{a^3+b^3}{a+b}\right)\div\left(a^2-b^2\right)+\frac{2b}{a+b}-\frac{ab}{a^2-b^2}$.

Решение:

решаем по действиям: 1) деление; 2) сложение; 3) вычитание.

1) Используя формулы сокращенного умножения разности квадратов: $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$, суммы кубов $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$, получим:

$$\left(\frac{a^3+b^3}{a+b}\right)\div\left(a^2-b^2\right)=\frac{(a+b)(a^2-ab+b^2)}{a+b}\cdot\frac{1}{(a-b)(a+b)}=\frac{(a^2-ab+b^2)}{(a-b)(a+b)};$$

2) Для сложения приведем дроби к общему знаменателю $(a-b)(a+b)$:

$$\frac{(a^2-ab+b^2)}{(a-b)(a+b)}+\frac{2b}{a+b}=\frac{a^2-ab+b^2+2b(a-b)}{(a-b)(a+b)}=\frac{a^2-ab+b^2+2ab-2b^2}{(a-b)(a+b)}=\frac{a^2+ab-b^2}{a^2-b^2}.$$

3) Выполним вычитание дробей с одинаковыми знаменателями:

$$\frac{a^2+ab-b^2}{a^2-b^2}-\frac{ab}{a^2-b^2}=\frac{a^2+ab-b^2-ab}{a^2-b^2}=\frac{a^2-b^2}{a^2-b^2}=1.$$

Задания для самостоятельного решения:

1) $\left(\frac{3}{x^2-3x+9}-\frac{xy-3y}{x^3+27}\right)\div\frac{x-y+3}{x^3y+27y}$

2) $\left(\frac{1}{x-y}+\frac{3xy}{y^3-x^3}\right)\div\frac{x-y}{2(x+y)}$

3) Решить уравнение: $7^{x^2-4x-5}=1$

4) Вычислить: $\log_{\frac{1}{8}}512-\lg 100+5^{\log_5 12}$

Контрольные вопросы:

1) Перечислите свойства логарифмов.

2) Способы решения показательных уравнений.

3) Сформулируйте формулы сокращённого умножения.

Литература: [4, с. 152 - 153]

Самостоятельная работа № 7.

"Таблица-шпаргалка: Основные тригонометрические тождества, формулы приведения, формулы двойного угла"

Студент должен знать определения синуса, косинуса, тангенса и котангенса.

Из определений синуса, косинуса, тангенса и котангенса следуют *основные тригонометрические тождества*:

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1;$$

$$tg\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha};\ ctg\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha};$$

$$tg\alpha\cdot ctg\alpha=1;$$

$$tg^2\alpha+1=\frac{1}{\cos^2\alpha};\ ctg^2\alpha+1=\frac{1}{\sin^2\alpha}.$$

Основой для остальных формул являются *формулы сложения*:

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta;$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta;$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta;$$

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta;$$

$$tg(\alpha+\beta)=\frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha\cdot tg\beta};\ tg(\alpha-\beta)=\frac{tg\alpha tg\beta}{1+tg\alpha\cdot tg\beta}.$$

Из формул сложения, полагая $\beta=\frac{\pi n}{2}$, где $n \in \mathbf{Z}$, получаем *формулы приведения* преобразования выражений вида:

$$\sin\left(\frac{\pi n}{2}\pm\alpha\right),\ \cos\left(\frac{\pi n}{2}\pm\alpha\right),\ \mathrm{tg}\left(\frac{\pi n}{2}\pm\alpha\right),\ \mathrm{ctg}\left(\frac{\pi n}{2}\pm\alpha\right),\ n \in \mathbf{Z}.$$

Для запоминания этих формул удобно пользоваться мнемоническим правилом:

1 Перед приведенной функцией ставится тот знак, который имеет исходная функция в соответствующей координатной четверти:

Номер координатной четверти	I	II	III	IV
sinα	+	+	-	-
cosα	+	-	-	+
tgα	+	-	+	-
ctgα	+	-	+	-

2 Функция меняется на «кофункцию», если *n* нечетно; функция не меняется, если *n* четно. (Кофункциями синуса, косинуса, тангенса и котангенса называются соответственно косинус, синус, котангенс, тангенс).

Формулы двойного угла тригонометрических функций:

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha,$$
$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha,$$
$$tg\, 2\alpha = \frac{2tg\,\alpha}{1 - tg^2\alpha},$$
$$ctg\, 2\alpha = \frac{ctg^2\alpha - 1}{2ctg\,\alpha}.$$

Контрольные вопросы:

1) Напишите основное тригонометрическое тождество.

2) Напишите формулы сложения.

3) Как легко запомнить формулы приведения?

Литература:[1, с.144 - 158]

Самостоятельная работа № 8

Составить таблицу: "Решения тригонометрических неравенств", таблицу-шпаргалку "Частные случаи решения тригонометрических уравнений".

Сведения из теории:

Уравнение $\cos t=a$

Очевидно, что если $|a|>1$, то уравнение $\cos t=a$ не имеет решений, т.к. $|\cos t|\leq 1$ для любого t.

Пусть $|a|\leq 1$. Надо найти все такие числа t, что $\cos t=a$. На отрезке $[0; \pi]$ существует только одно решение уравнения $\cos t=a$ – это число $\arccos a$.

Косинус – четная функция, и, значит на отрезке $[-\pi; 0]$ уравнение также имеет единственное решение – это число $-\arccos a$.

Итак, уравнение $\cos t=a$ на отрезке $[-\pi; \pi]$ длиной 2π имеет два решения $t=\pm\arccos a$ (совпадающие при $a=1$).

Уравнение $\sin t=a$

Очевидно, что если $|a|>1$, то уравнение $\sin t=a$ не имеет решений, т.к. $|\sin t|\leq 1$ для любого t.

При $|a|\leq 1$ на отрезке $[-\pi/2; \pi/2]$ уравнение $\sin t=a$ имеет одно решение $t_1=\arcsin a$. На отрезке $[\pi/2; 3\pi/2]$ функция синус убывает и принимает все значения от -1 до 1. По теореме о корне уравнение и на этом отрезке имеет одно решение. Это решение есть число $t_2=\pi-\arcsin a$, т.к. $\sin t_2=\sin(\pi-t_1)=\sin t_1=a$.

Кроме того, поскольку $-\pi/2\leq t_1\leq\pi/2$,

имеем $-\pi/2\leq -t_1\leq\pi/2$

и $\pi - \pi/2\leq\pi - t_1\leq\pi + \pi/2$,

т.е. $\pi/2\leq t_2\leq 3\pi/2$, $t_2 \in [\pi/2; 3\pi/2]$.

Итак, уравнение $\sin t=a$ на отрезке $[\pi/2; 3\pi/2]$ имеет два решения $t_1=\arcsin a$ и $t_2=\pi-\arcsin a$ (совпадающие при $a=1$). Учитывая, что период синуса равен 2π, получаем формулу для решения уравнения $\sin t=a$:

$$t=(-1)^k \arcsin a+\pi k,\ k \in \mathbf{Z}.$$

Уравнение $\mathrm{tg}\, x=a$

При любом a на интервале $(-\pi/2; \pi/2)$ существует одно число t , что $\mathrm{tg}\, t=a$, - это $\mathrm{arctg}\, a$. Поэтому уравнение $\mathrm{tg}\, x=a$ имеет на интервале $(-\pi/2; \pi/2)$ длиной π единственный корень.

Функция тангенс имеет период π. Следовательно, остальные корни уравнения *tg t=a* отличаются от найденного на πn, ($n \in \mathbf{Z}$), т.е.

$$t=arctg\ a+\pi n,\ (n \in \mathbf{Z}).$$

Чтобы составить ", таблицу-шпаргалку "Частные случаи решения тригонометрических уравнений", студент должен знать единичную окружность, т. е. при каких градусах каждая тригонометрическая функция обращается в нуль.

В таблице должны быть указаны решения уравнений:

sin t=0,	*tg x=0,*
cos t=0,	*ctg x=0.*
sin t=1,	*cos t=1,*
tg x=0,	*ctg x=1.*

Простейшими тригонометрическими неравенствами называются неравенства

sin $x<m$, sin $x>m$, cos $x<m$, cos $x>m$, tg $x<m$, tg $x>m$, ctg $x<m$, ctg $x>m$, где m – данное число.

Решить простейшее тригонометрическое неравенство – значит найти множество всех значений аргумента, которые обращают данное неравенство в верное числовое неравенство.

В таблице "Решения тригонометрических неравенств" должны быть указаны решения неравенств:

sin $x<m$, sin $x>m$, cos $x<m$, cos $x>m$, tg $x<m$, tg $x>m$, ctg $x<m$, ctg $x>m$.

Контрольные вопросы:

1) Что называется простейшим тригонометрическим уравнением ?

2) Что значит решить простейшее тригонометрическое уравнение?

3) Что называется простейшим тригонометрическим неравенством?

4) Что значит решить простейшее тригонометрическое неравенство?

Литература: **[1, с. 181 - 186]**

Самостоятельная работа №9.

"Построения графиков элементарных функций".

Цель работы:

уметь:

- строить графики элементарных функций.

Необходимые для работы знания:

знать:

- свойства элементарных функций.

Числовой функцией с областью определения D называется соответствие, при котором каждому числу x из множества D сопоставляется по некоторому правилу число y, зависящее от x.

Функции обычно обозначают латинскими буквами. Рассмотрим произвольную функцию f. Независимую переменную x называют аргументом функции. Число y, соответствующее числу x, называют значением функции f в точке x и обозначают $f(x)$. Область определения функции f обозначают $D(f)$. Множество, состоящее из всех чисел $f(x)$, таких, что x принадлежит области определения функции f, называют областью значений функции и обозначают $E(f)$.

Графиком функции f называют множество всех точек (x; y) координатной плоскости, где $y= f(x)$, а x «пробегает» всю область определения функции f.

График линейной функции

Линейная функция задается уравнением $y=ax+b$. График линейной функций представляет собой прямую. Чтобы построить прямую достаточно две точки.

1) Линейная функция вида $y=ax$ ($a\neq 0$) называется прямой пропорциональностью. Например, $y=-\frac{x}{2}$. График прямой пропорциональности всегда проходит через начало координат. Таким образом, построение прямой упрощается – достаточно найти всего одну точку.

2) Уравнение вида $y=b$ задает прямую, параллельную оси Оx, в частности, сама ось Оx задается уравнением $y=0$.

3) Уравнение вида $x=b$ задает прямую, параллельную оси Оy, в частности, сама ось Оy задается уравнением $x=0$.

График квадратичной, кубической функции

Парабола

График квадратичной функции $y=ax^2+bx+c$ ($a\neq 0$) представляет собой параболу. Рассмотрим канонический случай: $y=x^2$. Область определения – любое действительное число. Функция $y=x^2$ является чётной. Если функция является чётной, то ее график симметричен относительно оси Оy.

Для квадратичной функции $y=ax^2+bx+c$ ($a\neq 0$) справедливо следующее: Если $a>0$, то ветви параболы направлены вверх. Если $a<0$, то ветви параболы направлены вниз.

Кубическая парабола

Кубическая парабола задается функцией $y=x^3$. Область определения, область значений – любое дей График функции $y=\sqrt{x}$.

Область определения: $D(y)$: $[0; +\infty)$. Область значений: $E(y)$: $[0; +\infty)$. То есть, график функции полностью находится в первой координатной четверти. При построении подбираем такие значения «икс», чтобы корень извлекался нацело:

ствительное число. Функция является нечётной.

Гипербола

Общий вид $y=\dfrac{1}{x}$. Область определения: $D(y)$: $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$. Область значений: $E(y)$: $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$. Функция является нечётной, гипербола симметрична относительно начала координат.

Задания для самостоятельного решения:

Построить графики следующих функций и описать их свойства

1) $y=-x^2+2x-1$ 2) $y=\dfrac{9}{x}$ 5) $y=\dfrac{1}{3}x^3$

3) $y=3\sqrt{x}$ 4) $y=-\dfrac{6}{x}$ 6) $y=-\dfrac{1}{2}x^3$

Контрольные вопросы:

1) Опишите свойства линейной функции.

2) Опишите свойства квадратичной функции.

3) Опишите свойства функции $y = \frac{k}{x}$

Литература: [2, с. 209 -215]

Самостоятельная работа №10

"Построить графики показательной, логарифмической функции при различных основаниях и по ним записать свойства функций".

Цель работы:

уметь:

- строить графики показательной и логарифмической функции.

Необходимые для работы знания:

знать:

- свойства показательной и логарифмической функции.

Сведения из теории:

Пусть a – положительное число, $a \neq 1$.

Функцию, заданную формулой $y=log_a x$ называют *логарифмической функцией с основанием а*.

Перечислим основные свойства логарифмической функции:

1 Область определения – множество всех положительных чисел $\boldsymbol{R}_+$, т.е. $D(log_a)=(0; +\infty)$.

2 Область значений – множество всех действительных чисел $\boldsymbol{R}$, т.е. $E(log_a)=(-\infty; +\infty)$.

3 Логарифмическая функция на всей области определения возрастает при $a>1$ или убывает при $0<a<1$.

Для построения графика заметим, что значение 0 логарифмическая функция принимает в точке 1; $log_a 1=0$ при любом $a>1$, т.к. $a^0=1$.

Вследствие возрастания функции при $a>1$ получаем, что при $x>1$ логарифмическая функция принимает положительные значения, а при $0<x<1$ – отрицательные.

Если $0<a<1$,то логарифмическая функция убывает на $\boldsymbol{R}_+$, поэтому функция принимает положительные значения при $0<x<1$, а при $x>1$ – отрицательные.

Справедливо следующее утверждение: графики показательной и логарифмической функций, имеющих одинаковое основание, симметричны относительно прямой $y=x$.

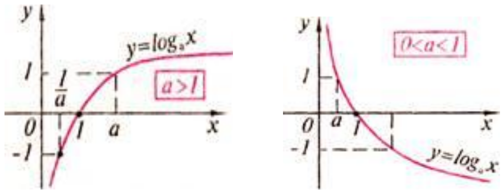


рис. 1

Задания для самостоятельного решения:

Построить графики функций:

1) $y = 3^x$

2) $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$

3) $\log_2 x$

4) $\log_{\frac{1}{3}} x$

Описать свойства данных функций.

Контрольные вопросы:

1) Опишите свойства показательной функции.

2) Опишите свойства логарифмической функции.

Литература: [2, с. 140 - 142]

Самостоятельная работа № 11

"Записать в тетрадь основные этапы "движения" графика функции".

Цель работы:

уметь:

- проводить диагностику смещения, растяжения и сжатия графиков исходных функций вдоль осей координат;

- строить стандартные графики с учетом коэффициентов растяжения и сжатия.

Необходимые для работы знания:

знать:

- формулы перемещения графика квадратичной функции;

- формулы перемещения графиков тригонометрических функций.

Сведения из теории:

Преобразование графиков функции:

1) функция $y = f(x) + m$, график перемещается вдоль оси ординат на m единиц.

2) функция $y = f(x + t)$, график перемещается вдоль оси абсцисс

3) функция $y = af(x)$, график растягивается или сжимается в a раз вдоль оси абсцисс.

4) функция $y = f(kx)$, график растягивается или сжимается в k раз вдоль оси ординат.

Самостоятельно изучить все данные пункты.

Привести примеры на каждый пункт, построить график каждой функции и описать его.

Контрольные вопросы:

Перечислить все преобразования функций.

Литература: []

Самостоятельная работа № 12

"Выписать в тетрадь формулу разложения квадратного трехчлена на множители, формулы сокращенного умножения".

Цель работы:

уметь:

- решать квадратное уравнение;

- разлагать на множители квадратный трехчлен.

Необходимые для работы знания:

знать:

- формулу разложения квадратного трехчлена на множители;

- формулы сокращенного умножения.

Сведения из теории:

Формулы сокращенного умножения

$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$; $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$;

$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$; $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$,

где a, b, c – любые действительные числа;

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),$$

где $a \neq 0$, x_1 и x_2 – корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

Задания для самостоятельного решения:

1) Сформулировать словесно каждую формулу и записать в тетради.

2) Разложить на множители и сократить дробь:

а) $\dfrac{a^2 + 2ab + b^2}{2a^4 - 2b^4}$ б) $\dfrac{a^3 + 1}{6a^2 + 12a + 6}$

Контрольные вопросы:

1) Сформулируйте формулы сокращённого умножения.

2) Сформулируйте формулу разложения квадратного трехчлена на множители.

Литература:[4, с. 152 - 153]

Самостоятельная работа № 13

Оформление сообщения по теме: "Первый и второй замечательные пределы".

Составить конспект темы по следующему плану:

1Понятие предела.

2 первый замечательный предел, формула.

3 где применяется первый замечательный предел, пример.

4 второй замечательный предел, формула.

5 где применяется второй замечательный предел, пример.

6 обобщение.

Самостоятельная работа № 14

"Составить таблицу значений производных некоторых элементарных функций".

В таблице должны быть указаны следующие функции:

1) натуральный логарифм

2) логарифмическая функция

3) степенная функция

4) подкоренное выражение

5) показательная функция

6) функция $y = e^x$

7) тригонометрические функции:

8) обратные тригонометрические функции

Контрольные вопросы:

1) Что называется производной?

2) Можно ли вычислить производную любой функции, пользуясь определением производной?

Литература: [1,с. 209]

Самостоятельная работа №15

"Дополнить таблицу производных некоторых элементарных функций "сложными" производными.

Цель работы:

уметь:

- писать формулы производных сложной функции с помощью элементарных функций.

Необходимые для работы знания:

знать:

- таблицу производных элементарных функций.

В таблице должны быть указаны сложные функции:

1) натуральный логарифм

2) логарифмическая функция

3) степенная функция

4) подкоренное выражение

5) показательная функция

6) функция $y = e^u$

7) тригонометрические функции:

8) обратные тригонометрические функции

Контрольные вопросы:

1) Что называется производной?

2) Можно ли вычислить производную любой "сложной" функции, пользуясь определением производной?

Литература: [1, с. 215- 230]

Самостоятельная работа №16

"Выписать в тетрадь комплексную схему исследования и построения графиков функции с помощью производной"

Цель работы:

уметь:

- вычислять производную элементарных функций;

- определять промежутки монотонности функции;

-определять точки экстремума функции.

Необходимые для работы знания:

знать:

- определение производной;

- алгоритм нахождения промежутков монотонности и экстремальных точек функции.

Сведения из теории:

При построении графиков функции с помощью производных полезно придерживаться такой схемы:

1) Находят область определения функции и определяют точки разрыва, если они имеются.

2) Выясняют, не является функция четной или нечетной; проверяют её на её на периодичность.

3) Определяют точки пересечения графика функции с координатными осями, если это возможно.

4) Находят критические точки функции.

5) Определяют промежутки монотонности и экстремумы функции.

6) Определяют промежутки вогнутости и выпуклости кривой и находят точки перегиба.

7) Используя результаты исследования, соединяют полученные точки плавной кривой.

Контрольные вопросы:

1) Как отыскивают экстремумы функций с помощью производной?

2) Как определяют по знаку производной выпуклость и вогнутость кривой?

Литература: [1, с. 239 - 242]

Самостоятельная работа №17

"Таблица значений интегралов некоторых элементарных функций; метод интегрирования по частям"

Цель работы:

уметь:

- вычислять интегралы элементарных функций;

- вычислять интегралы функций разными методами.

Необходимые для работы знания:

знать:

- таблицу интегралов элементарных функций;

- свойства интегралов функций;

- методы вычисления интегралов.

Сведения из теории:

Из определения интеграла следует, что для того чтобы проинтегрировать функцию, нужно найти её первообразную. Формулы интегрирования получаются обращением соответствующих формул дифференцирования

Пример14.

$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; отсюда следует, что $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$

Используя данное правило интегрирования с помощью таблицы производных составить таблицу интегралов.

В таблице должны быть указаны следующие функции:

1) натуральный логарифм

2) степенная функция

3) показательная функция

4) функция $y = e^x$

5) тригонометрические функции.

6) обратные тригонометрические функции.

При интегрировании функций, содержащих произведения, логарифмы и обратные тригонометрические функции, бывает удобно воспользоваться способом интегрирования по частям:

Формула интегрирования по частям:

$$\int udv = uv - \int vdu$$

Пример15.

Найти интеграл $\int xcosxdx$

Решение:

Интеграл содержит произведение двух функций x и $cosx$

Обозначим $x = u, cosxdx = dv$; тогда $dx = du; v = \sin x$. Применим формулу интегрирования по частям:

$$\int xcosxdx = x\sin x - \int \sin xdx = x\sin x + \cos x + C$$

Задания для самостоятельного решения:

1) $\int xlnxdx$

2) $\int arctgxdx$

3) $\int x\sin 2xdx$

4) $\int x\cos 3xdx$

5) $\int xe^x\, dx$

6) $\int arcctgxdx$

Контрольные вопросы:

1) Какое действие называется интегрированием?

2) Какая функция называется первообразной для данной функции $f(x)$?

3) Суть метода интегрирования по частям.

Литература: [с. 296-297, с. 316-317]

__Самостоятельная работа №18__

"Формулы вычисления площадей криволинейных трапеций; применение определенного интеграла".

__Цель работы:__

уметь:

- вычислять определенный интеграл;

- вычислять площадь криволинейной трапеции.

__Необходимые для работы знания:__

знать:

- определение интеграла;

- свойства интегралов;

- правила вычисления интегралов;

- площадь криволинейной трапеции.

__Сведения из теории:__

Для вычисления площади криволинейной трапеции применяется следующая формула:

$$S = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Данная формула называется формулой Ньютона - Лейбница.

__Пример16.__

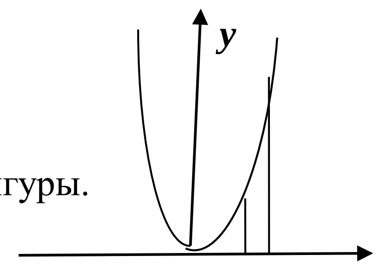
Вычислить площадь фигуры, ограниченной данными линиями:

$y = x^2,\ y = 0,\ x = 2, x = 3;$

__Решение:__

Сделаем чертеж:

Нам нужно найти площадь заштрихованной фигуры.



вычислим по формуле: 2 3 x

$$S=\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a).$$

$f(x)=x^2,$
$a=2$
$b=3$

$$S=\int_2^3 x^2dx=\left.\frac{x^3}{3}\right|_2^3=\frac{27}{3}-\frac{8}{3}=\frac{19}{3}=6\frac{1}{3}\text{ (кв.ед.)}$$

Задания для самостоятельного решения:

Вычислить площади фигур, ограниченных линиями:

1) $y=\sqrt{x}, \mathrm{y}=0, \mathrm{x}=1, \mathrm{x}=4$; 2) $y=\sin x, \mathrm{y}=0, \mathrm{x}=0, \mathrm{x}=\pi$;

3) $y=x^2, \mathrm{y}=2\mathrm{x}$; 4) $y=x^3+1, \mathrm{y}=0, \mathrm{x}=-1, \mathrm{x}=3$.

Контрольные вопросы:

1) Перечислите свойства определенного интеграла.

2) Напишите формулу Ньютона - Лейбница.

Литература: [1, с. 273 - 274]

Самостоятельная работа №19

"Решение расчетных задач по теме "разложение на множители, введение новых переменных, подстановка".

Цель работы:

уметь:

- разлагать формулы сокращенного умножения;

- упрощать выражения по формулам сокращенного умножения.

Необходимые для работы знания:

знать:

- формулы сокращенного умножения.

Сведения из теории:

Формулы сокращенного умножения:

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b);$$

$$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2;$$

$$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3;$$

$$a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2),$$

где a, b, c – любые действительные числа;

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2),$$

где $a\neq 0$, x_1 и x_2 – корни уравнения $ax^2+bx+c=0$.

Основное свойство дроби и действия над дробями

$\frac{a\cdot c}{b\cdot c}=\frac{a}{b}=\frac{a:c}{b:c}$, где $b\neq 0$, $c\neq 0$; $\quad \frac{a}{c}\pm\frac{b}{c}=\frac{a\pm b}{c}$;

$\frac{a}{c}\pm\frac{b}{d}=\frac{ad\pm bc}{cd}$; $\quad \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$; $\quad \frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}$.

Пример 17.

Упростите: $\left(\frac{a^3+b^3}{a+b}\right)\div\left(a^2-b^2\right)+\frac{2b}{a+b}-\frac{ab}{a^2-b^2}$.

Решение:

решаем по действиям: 1) деление; 2) сложение; 3) вычитание.

1) Используя формулы сокращенного умножения разности квадратов: $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$, суммы кубов $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$, получим:

$$\left(\frac{a^3+b^3}{a+b}\right)\div\left(a^2-b^2\right)=\frac{(a+b)(a^2-ab+b^2)}{a+b}\cdot\frac{1}{(a-b)(a+b)}=\frac{(a^2-ab+b^2)}{(a-b)(a+b)};$$

2) Для сложения приведем дроби к общему знаменателю $(a-b)(a+b)$:

$$\frac{(a^2-ab+b^2)}{(a-b)(a+b)}+\frac{2b}{a+b}=\frac{a^2-ab+b^2+2b(a-b)}{(a-b)(a+b)}=$$
$$=\frac{a^2-ab+b^2+2ab-2b^2}{(a-b)(a+b)}=\frac{a^2+ab-b^2}{a^2-b^2}.$$

3) Выполним вычитание дробей с одинаковыми знаменателями:

$$\frac{a^2+ab-b^2}{a^2-b^2}-\frac{ab}{a^2-b^2}=\frac{a^2+ab-b^2-ab}{a^2-b^2}=\frac{a^2-b^2}{a^2-b^2}=1.$$

Задания для самостоятельного решения:

1) $\left(m+n-\dfrac{4mn}{m+n}\right)\div\left(\dfrac{m}{m+n}-\dfrac{n}{n-m}-\dfrac{2mn}{m^2-n^2}\right).$

2) $\dfrac{3a^2+3ab+3b^2}{4a+4b}\cdot\dfrac{2a^2-2b^2}{9a^3-9b^3}.$

3) $\dfrac{x^2}{3+x}\cdot\dfrac{9-x^2}{x^2-3x}+\dfrac{27+x^3}{3-x}\div\left(3+\dfrac{x^2}{3-x}\right).$

4) $2x-\left(\dfrac{2x-3}{x+1}-\dfrac{x+1}{2-2x}-\dfrac{x^2+3}{2x^2-2}\right)\cdot\dfrac{x^3+1}{x^2-x}.$

5) $\left(\dfrac{1}{c^2+3c+2}+\dfrac{2c}{c^2+4c+3}+\dfrac{1}{c^2+5c+6}\right)^2\cdot\dfrac{(c-3)^2+12c}{2}.$

Контрольные вопросы:

1) Написать формулы квадрата суммы и разности .

2) Написать формулы разности квадратов.

3) Написать формулы кубов суммы и разности.

Литература:[4, с. 151 -152]

Самостоятельная работа №20

"Составить таблицу "все решения линейных неравенств", графическое решение систем линейных неравенств с двумя переменными".

Цель работы:

уметь:

- решать линейные неравенства;

решать системы линейных неравенств.

Необходимые для работы знания:

знать:

- определение неравенства;

- свойства линейных неравенств.

Сведения из теории:

Различают два типа линейных неравенств:

1) Строгие неравенства: $Ax + By + C > 0$ либо $Ax + By + C < 0$

2) Нестрогие неравенства: $Ax + By + C \geq 0$ либо $Ax + By + C \leq 0$

Чтобы решать графически системы неравенств, следует знать следующие правила:

1) неравенство $x > 0$ задаёт правую полуплоскость;

2) неравенство $x \geq 0$ задаёт правую полуплоскость, включая ось ординат;

3) неравенство $x < 0$ задаёт левую полуплоскость;

4) неравенство $x \leq 0$ задаёт левую полуплоскость, включая ось ординат;

5) неравенство $y > 0$ задаёт верхнюю полуплоскость;

6) неравенство $y < 0$ задаёт нижнюю полуплоскость.

Решить систему линейных неравенств - это значит найти множество точек плоскости, которые удовлетворяют каждому неравенству системы.

Область решений может быть неограниченной, или ограниченной.

Ограниченная область решений называется многоугольником решений системы.

Пример18.

Решить систему линейных неравенств:

$$\begin{cases} x - 3y \geq -12 \\ x - 6 \leq 0 \\ 4x + 3y \leq 24 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

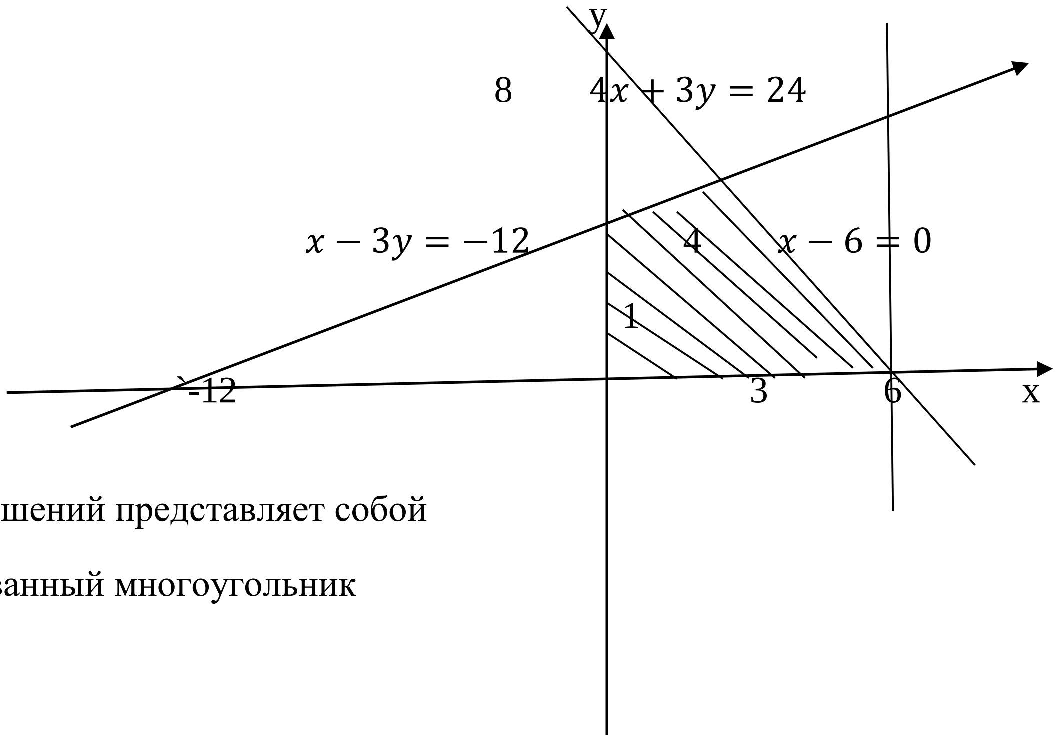
Решение:

Нам дана система линейных неравенств, и мы построим на координатной плоскости графики данных неравенств.

$x - 3y = -12$ при *x=0 y=4; при y=0 x=-12* (график проходит через точки (0; 4) и (-12; 0)

$x - 6 = 0$ (графиком является прямая, проходящая через точку (-6;0) и параллельная оси ординат)

$4x + 3y = 24$ при *x=0 y=8;* при *y=0, x=6* (график проходит через точки (0;8) и (6;0)



область решений представляет собой

заштрихованный многоугольник

Задания для самостоятельного решения:

Решить графически систему неравенства:

$$\begin{cases} 2x - 3y \geq -18 \\ x + y \geq -2 \\ 4x + y \geq -10 \\ x \leq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x + y \geq -9 \\ -x + 4 \geq 0 \\ x - 4y \leq -8 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Контрольные вопросы:

1) Какие бывают неравенства?

2) Перечислите свойства неравенств.

3) Что значит решить графически систему линейных неравенств?

Литература:[4, с. 111 -112]

Самостоятельная работа №21

"Решение расчетных задач по теме "элементы комбинаторики".

Цель работы:

уметь:

- решать задачи по элементам комбинаторики.

Необходимые для работы знания:

знать:

- соединения комбинаторики и их формулы.

Сведения из теории:

Различают три основных вида соединений: *размещения, перестановки и сочетания*.

Размещениями из n элементов по m в каждом называются такие соединения, которые отличаются друг от друга либо самими элементами, либо порядком их расположения.

Число размещений из n элементов по m обозначается и вычисляется по формуле:

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)...[n-(m-1)].$$

Перестановками из n элементов называются такие соединения из всех n элементов, которые отличаются друг от друга порядком расположения элементов.

Перестановки представляют частный случай размещений из n элементов по n в каждом.

Число всех перестановок из n элементов равно произведению последовательных чисел от 1 до n включительно:

$$P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot (n-1)n,$$

$n!$-читается «n-факториал», причем 0!=1 и 1!=1.

Используя приведенные выше определения имеем формулы:

$$A_n^m = \frac{P_n}{P_{n-m}} = \frac{n!}{(n-m)!},$$

при решении задач часто используется равенство:

$$A_n^{m+1} = (n-m)A_n^m.$$

Сочетаниями из n элементов по m в каждом называются такие соединения, которые отличаются друг от друга хотя бы одним элементом.

Число сочетаний из n элементов по m обозначается и вычисляется по формуле:

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_n^m},$$

которую можно записать также в виде

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} \text{ или } C_n^m = \frac{n(n-1)...[n-(m-1)]}{m!}.$$

Кроме того, при решении задач используются следующие формулы, выражающие основные свойства сочетаний: $C_n^m = C_n^{n-m}\ (0 \le m \le n)$, $C_n^n = 1;\ C_n^0 = 1;\ C_n^m + C_n^{m+1} = C_{n+1}^{m+1}$

Пример 19.

Найти число размещений из 10 элементов по 4.

Решение:

$A_{10}^4 = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040$

Пример 20.

Сколькими способами из восьми кандидатов можно выбрать три лица на три должности?

Решение:

условию задачи соответствуют размещения, имеем: $A_8^3 = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$

Задания для самостоятельного решения:

1) Из 8 открыток надо выбрать 5. Сколькими способами это можно сделать?

2) Сколькими способами можно составить флаг, состоящий из трех горизонтальных полос различных цветов, если имеется материал семи различных цветов?
3)Сколько различных пятизначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 3, 5, 7 так, чтобы в каждом числе не было одинаковых цифр?
4)Бригадир должен отправить на работу бригаду из 3 человек. Сколько таких бригад можно составить из 8 человек?
5)Группа учащихся изучает семь учебных дисциплин. сколькими способами можно составить расписание занятий на понедельник, если в этот учебный день должно быть четыре различных урока?

6) Сколько матчей будет сыграно в футбольном чемпионате с участием 16 команд, если каждые две команды встречаются между собой один раз?

Контрольные вопросы:

1) Виды соединений.

2) Что называется перестановкой?

3) Что называется сочетанием?

4) Что называется размещением?

Литература:[3, с. 13 - 15]

Самостоятельная работа №22

"Решение расчетных задач по теме "события, вероятность события".

Цель работы:

уметь:

- решать задачи на вероятность.

Необходимые для работы знания:

знать:

- определение вероятности и её формулу;

- теорему сложения вероятности;

- теорему умножения вероятности.

Сведения из теории:

Случайные события

Изучение каждого явления в порядке наблюдения или производства опыта связано с осуществлением некоторого комплекса условий (испытаний). Всякий результат или исход испытания называется *событием*.

Если событие при заданных условиях может произойти или не произойти, то оно называется *случайным*.

В том случае, когда событие должно непременно произойти, его называют *достоверным*, а в том случае, когда оно заведомо не может произойти, *невозможным*.

События называются *несовместными*, если каждый раз возможно появление только одного из них. События называются *совместными*, если в данных условиях появление одного из этих событий не исключает появление другого при том же испытании.

События называются *противоположными*, если в условиях испытания они, являясь единственными его исходами, несовместны.

Вероятность события рассматривается как мера объективной возможности появления случайного события.

Классическое определение вероятности.

Вероятностью события А называется отношение числа благоприятных исходов m, к числу всех возможных исходов n: $P(A)=\frac{m}{n}$.

Вероятность любого события не может быть меньше нуля и больше единицы, т. е. $0 \le P(A) \le 1$.

Невозможному событию соответствует вероятность P(A)=0, а достоверному – вероятность P(A)=1.

Пример 21.

В лотерее из 1000 билетов 200 выигрышных. Вынимают наугад один билет. Какова вероятность, что этот билет выигрышный?

Решение:

Количество благоприятных событий, удовлетворяющих условию задачи m=200

Число всех возможных вариантов n=1000

По определению вероятности: P(A)=200/1000=0,2.

Пример 22.

Из урны, в которой находятся 5 белых и 3 черных шара, вынимают один шар. Найти вероятность того, что этот шар черный?

Решение:

общее число шаров m=8, из них черных n=3, по определению: P(A)=3/8=0,375.

Задания для самостоятельного решения:

1) Вероятность того, что в магазине будет продана пара мужской обуви 44-го размера, равна 0,12; 45-го – 0,04; 46-го и большего – 0,01. Найти вероятность того, что будет продана пара мужской обуви не меньше 44-го размера.

2) При условиях задачи 1 найти вероятность того, что очередной будет продана пара обуви меньше 44-го размера.

3) В ящике находятся 5 резцов: два изношенных и три новых. Производится два последовательных извлечения резцов. Определить условную вероятность появления изношенного резца при втором извлечении при условии, что извлеченный в первый раз резец в ящик не возвращается.

4) В урне находятся 5 белых шаров, 4 черных и 3 синих. Каждое испытание состоит в том, что наудачу извлекают один шар, не возвращая его в урну. Найти вероятность того, что при первом испытании появится белый шар (событие A), при втором - черный (событие B) и при третьем – синий (событие C).

Контрольные вопросы:

1) Какие события называются случайными?

2) Какие события называются совместными?

3) Дайте классическое определения вероятности.

4) Сформулируйте теорему сложения вероятностей совместных событий.

5) Сформулируйте теорему умножения вероятностей независимых событий.

Литература: [с. 374 - 380]

Самостоятельная работа №23

"Решение расчетных задач с применением вероятностных методов".

Цель работы:

уметь :

- вычислять математическое ожидание и дисперсию дискретной случайной величины.

Необходимые для работы знания:

знать:

- строить таблицу распределения по условию задачи.

- формулу математического ожидания;

- формулу дисперсии дискретной случайной величины;

- закон распределения дискретной случайной величины.

Сведения из теории:

Случайные величины (дискретные и непрерывные) характеризуются своим законом распределения.

Достаточно знать лишь некоторые количественные характеристики закона распределения.

Простейшей, но очень важной характеристикой является математическое ожидание.

Пусть, например, X - дискретная случайная величина распределена по закону:

X	X_1	X_2	…	Xn
P	P_1	P_2	…	Pn

Тогда ее *математическое ожидание $M(X)$* определяется равенством

$$M(X) = X_1 P_1 + X_2 P_2 + \ldots + Xn\ Pn.$$

Обратим внимание на то, что хотя конкретные значения величины X являются случайными, математическое ожидание $M(X)$ случайным не является.

Пусть, например, испытание состоит в бросании игрального кубика. Поскольку выпадение каждой грани равновозможное, Pi = 1/6. Следовательно, математическое ожидание числа выпавших очков равно

$M(X)$ = 1/6(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 21/6 = 3,5.

Число, близкое к этому, получится, если реально бросать кубик много раз и подсчитать сумму очков, деленную на число бросков.

Математическое ожидание и среднее арифметическое случайной величины - важные характеристики закона распределения, но, зная только их, мы имеем еще весьма одностороннее представление о нем. Не ясно, например, как велики могут быть отклонения значений величины от этих характеристик. Ведь одно и то же значение среднего арифметического наблюдаемых значений может получиться как в случае, когда все значения находятся вблизи среднего, так и в случае сколь угодно больших отклонений от него в сторону больших и меньших величин.

Для того чтобы характеризовать в среднем величины таких отклонений, вводится еще один важный параметр закона распределения, называемый дисперсией.

Дисперсией (рассеянием) дискретной случайной величины называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания:

$$D\{X) = M[X- M(X)]^2.$$

Так же дисперсию можно вычислить и по формуле:

$$D\{X) = M(X^2)- [M(X)]^2,$$

т. е. как разность математического ожидания квадрата значений случайной величины и квадрата её математического ожидания.

Дисперсия суммы двух независимых случайных величин равна сумме дисперсий этих величин:

$$D(X+Y) = D(X) + D(Y).$$

Многие случайные величины, встречающиеся на практике, имеют размерность. Например, величины, которые встречаются при различных измерениях. Тогда, если, скажем, случайная величина измеряется в метрах, то дисперсия будет иметь размерность $м^2$. Поэтому вводится еще одна характеристика, называемая *средним квадратическим отклонением*, обозначается: $\sigma = \sqrt{D(X)}$. ее размерность совпадает с размерностью случайной величины.

Пример 23.

Пусть X – число очков, выпадающих при одном бросании игральной кости. Найти дисперсию случайной величины X.

Решение:

случайная величина X – число очков принимает значения 1, 2, 3, 4, 5, 6. Составим закон её распределения:

X_i	1	2	3	4	5	6
P_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Тогда её математическое ожидание:

$$M(X)=1\cdot\frac{1}{6}+2\cdot\frac{1}{6}+3\cdot\frac{1}{6}+4\cdot\frac{1}{6}+5\cdot\frac{1}{6}+6\cdot\frac{1}{6}=3{,}5.$$

Найдем отклонения для $x_1, x_2, \ldots, x_6$:

$$x_1^0=1-3{,}5;\ x_2^0=2-3{,}5;\ x_3^0=3-3{,}5;\ x_4^0=4-3{,}5;\ x_5^0=5-3{,}5;\ x_6^0=6-3{,}5.$$

Вычислим дисперсию:

$$D(X)=\frac{1}{6}((1-3{,}5)^2+(2-3{,}5)^2+(3-3{,}5)^2+(4-3{,}5)^2+(5-3{,}5)^2+(6-3{,}5)^2)=\frac{35}{12}.$$

Задания для самостоятельного решения:

1) Монету подбрасывают 7 раз. Найти математическое ожидание, дисперсию числа появлений герба.

2) Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины, заданной таблицей распределения:

X	-2	-1	0	1	2
p	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1

3) Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины, заданной таблицей распределения:

X	1	5	10	15	20
p	0,1	0,11	0,2	0,22	0,37

4) Игральную кость подбросили 5 раз. Найти математическое ожидание, дисперсию числа невыпадения единицы.

5) Правильная треугольная пирамида имеет пронумерованные грани 1, 2, 3, 4. Запишите закон распределения для выпадения номера грани, на которой стоит пирамида.

Контрольные вопросы:

1) Что называется математическим ожиданием?

2) Напишите формулу математического ожидания?

3) Что называется дисперсией?

4) Напишите формулу дисперсии.

Литература:[3, с. 103 - 113]

Самостоятельная работа №24

"Взаимное расположение двух прямых, прямой и плоскости в пространстве, построить в тетради всевозможные варианты".

Цель работы:

уметь:

- решать простейшие задачи на взаимное расположение двух прямых, прямой и плоскости;

Необходимые для работы знания:

знать:

- варианты взаимного расположения двух прямых, прямой и плоскости в пространстве.

Сведения из теории:

Признаки параллельности прямой и плоскости

1) Если прямая, лежащая вне плоскости, параллельна какой-либо прямой, лежащей в этой плоскости, то она параллельна этой плоскости.

2) Если прямая и плоскость перпендикулярны одной и той же прямой, то они параллельны.

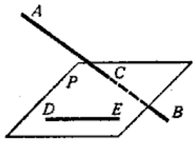
Признаки параллельности прямых в пространстве

1) Если две прямые перпендикулярны одной и той же плоскости, то они параллельны.

2) Если в одной из пересекающихся плоскостей лежит прямая, параллельная другой плоскости, то она параллельна линии пересечения плоскостей.

Параллельные прямые

Возьмём, например, две такие прямые AB и DE, из которых одна пересекает некоторую плоскость P, а другая лежит на ней, но не проходит через точку (C) пересечения первой прямой и плоскости P.

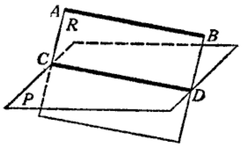


Через такие две прямые нельзя провести плоскость, потому что в противном случае через прямую и точку C проходили бы две различные плоскости: одна P, пересекающая прямую AB, и другая, содержащая её, а это невозможно.
Две прямые, не лежащие в одной плоскости, конечно, не пересекаются, сколько бы их ни продолжали; однако их не называют параллельными.
Две прямые, не лежащие в одной плоскости, называются *скрещивающимися*.

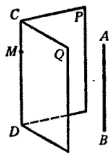
Прямая и плоскость параллельные между собой

Плоскость и прямая, не лежащая в этой плоскости, называются параллельными, если они не пересекаются, сколько бы их ни продолжали.

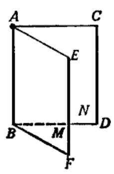
Если прямая (AB) параллельна какой-нибудь прямой (CD),расположенной в плоскости (P), то она параллельна самой плоскости.
Если плоскость (R) проходит через прямую (AB), параллельную другой плоскости (P), и пересекает эту плоскость, то линия пересечения (CD) параллельна первой прямой (AB).



Если прямая (AB) параллельна каждой из двух пересекающихся плоскостей (P и Q), то она параллельна линии их пересечения (CD).



Если две прямые (AB и CD) параллельны третьей прямой (EF), то они параллельны между собой.



Перпендикулярность прямых:

Определение:

Две прямые в пространстве могут пересекаться. (привести примеры перпендикулярных прямых , используя окружающую обстановку).

Определение:

Прямая называется перпендикулярной к плоскости, если она перпендикулярна любой прямой, лежащей в этой плоскости.

Свойства перпендикулярных прямой и плоскости:

1) Через любую точку пространства проходит плоскость, перпендикулярная к данной прямой.

2) Если две плоскости α и β перпендикулярны к прямой а, то они параллельны.

3) Если одна из двух параллельных плоскостей перпендикулярна к прямой, то и другая плоскость перпендикулярна к этой прямой.

Самостоятельно подготовить ответы на следующие вопросы:

1) Верно ли что: если 2 прямые в пространстве перпендикулярны к третьей прямой, то это утверждение при условии, что все три прямые параллельны? Верно ли это утверждение при условии, что все три прямые лежат в одной плоскости?

2) Прямая а α, аb α. Существует ли прямая, перпендикулярная к прямым а и b?

Литература:[1, с. 323 -326]

Самостоятельная работа №25

" Разобрать теорему о перпендикулярности двух плоскостей, выполнить в тетради чертеж, сделать соответствующие записи; решение задач на нахождение двугранных углов"

Цель работы:

уметь:

- решать задачи на нахождение двугранного угла.

Необходимые для работы знания:

знать:

- определение двугранного угла;

- строить линейный угол двугранного угла.

Сведения из теории:

Определение:

Если две плоскости, пересекаясь, образуют прямые двугранные углы, то они называются взаимно перпендикулярными.

Теорема:

Если плоскость проходит через перпендикуляр к другой плоскости, то она перпендикулярна к этой плоскости.

Доказательство (разобрать по учебнику) стр. 331 по учебнику Н. В. Богомолова "Математика".

Часть пространства, ограниченная двумя полуплоскостями, общей ограничивающей их прямой, называется двугранным углом.

Полуплоскости двугранного угла называются гранями, общая прямая - ребром.

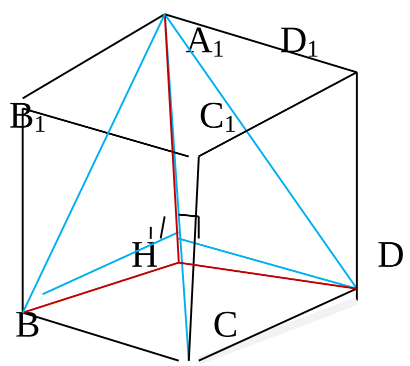
Плоскость, перпендикулярная ребру двугранного угла, пересекает его грани по двум полупрямым.

Угол, образованный этими полупрямыми, называется линейным углом.

Градусная мера двугранного угла равна градусной мере его линейного угла.

Пример24.

Диагональ A_1C куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ребром двугранного угла, грани которого проходят через вершины B и D. Найдите величину этого угла.



Решение:

Для начала предположим, что ребро куба равно 1. Тогда диагональ куба равна $\sqrt{3}$. Рассмотрим треугольники A_1CB и A_1CD. Они равны по трем сторонам. Опустим перпендикуляры из точек B и D к A_1C. Раз треугольники равны, то и перпендикуляры тоже равны и попадают в одну точку H. Таким образом нам нужно найти величину угла BHD. Для этого найдем длины BH и DH. В прямоугольном треугольнике CHB CH=$A_1C/3=\sqrt{3}/3$. CB=1. Следовательно BD=$\sqrt{2}/\sqrt{3}$. Мы знаем все три стороны и можем найти угол BHD по теореме косинусов. Получится $\cos(BHD) = -\frac{1}{2}$, т. е. BHD=120°

Задания для самостоятельного решения:

1) Построить линейный угол двугранного угла при стороне основания:

а) в правильной треугольной пирамиде;

б) в правильной четырехугольной пирамиде.

2) В правильной шестиугольной пирамиде, стороны основания которой равны 1а боковые ребра равны 2, найти косинусы двугранных углов при основании и при боковом ребре.

3) Диагональ A_1C куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ служит ребром двугранного угла, грани которого проходят через середины ребер AB DD_1. Найдите величину этого угла.

4) Основание пирамиды DABC - равнобедренный треугольник ABC, в котором AB=BC=13, AC=24. Ребро DB перпендикулярно плоскости основания и равно 20. Найдите тангенс двугранного угла при ребре AC.

Контрольные вопросы:

1) Что называется двугранным углом? Его ребром? Гранями?

2) Что называется линейным углом двугранного угла?

3) Какая существует зависимость между двугранными углами и их линейными углами?

Литература: [с. 331 - 332]

Самостоятельная работа № 26

"Выполнение макетов из фигур (из бумаги, проволоки и др. материалов). Выполнение чертежей (А3) правильных многогранников(куб, тетраэдр, октаэдр)".

Цель работы:

уметь:

- строить правильные многогранники.

Необходимые для работы знания:

знать:

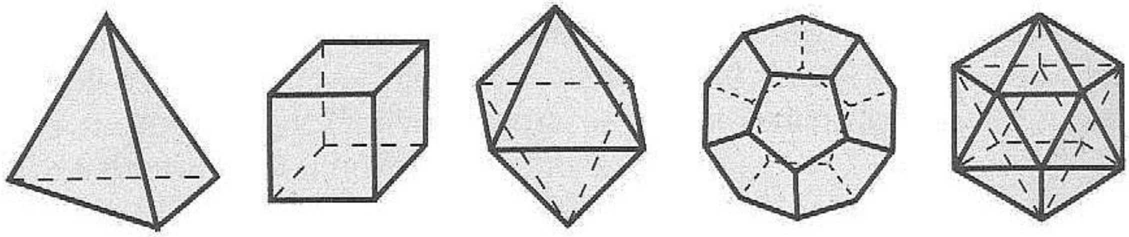
- определения правильных многогранников;

- свойства правильных многогранников.

Сведения из теории:

Для того, чтобы выполнить макеты, студентам необходимо знать свойства многогранников:

Правильный многогранник	Число	
	Граней и вершин (Г + В)	Ребер (Р)
Тетраэдр	4 + 4 = 8	6
Куб	6 + 8 = 14	12
Октаэдр	8 + 6 = 14	12
Додекаэдр	12 + 20 = 32	30
Икосаэдр	20 + 12 = 32	30



Тетраэдр Куб Октаэдр Додекаэдр Икосаэдр

«Сумма числа граней и вершин равна числу ребер, увеличенному на 2»:
Г + В = Р + 2.

Многогранник называется правильным, если:

он выпуклый,

все его грани - равные правильные многоугольники,

в каждой вершине сходится одинаковое число граней,

все его двухгранные углы равны.

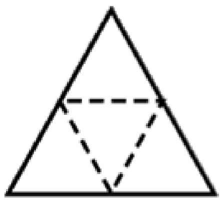
Тетраэдр и его свойства

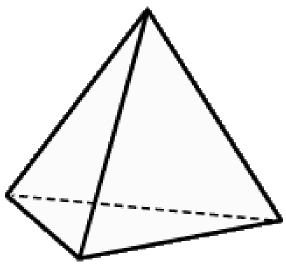
Тетраэдр составлен из четырех равносторонних треугольников.
Каждая его вершина является вершиной трех треугольников.
Сумма плоских углов при каждой вершине равна 180 градусов.
Таким образом, тетраэдр имеет

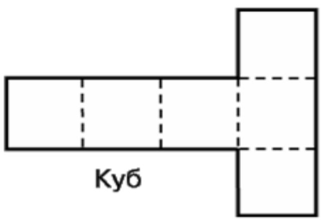
4 грани,

4 вершины

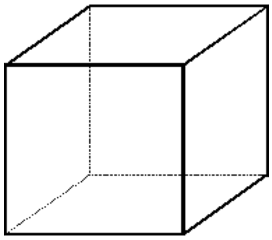
и 6 ребер.

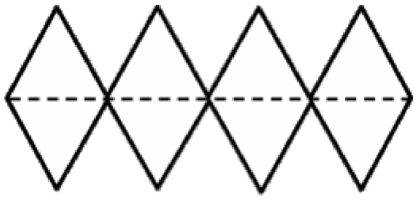




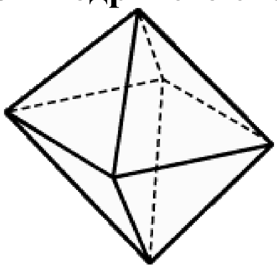


Куб составлен из шести квадратов.
Каждая его вершина является вершиной трех квадратов.
Сумма плоских углов при каждой вершине равна 270 градусов. ***Таким образом, куб имеет*** 6 ***граней,*** 8 ***вершин***, 12 ***ребер.***





Октаэдр и его свойства



Октаэдр составлен из восьми равносторонних треугольников.
Каждая его вершина является вершиной четырех треугольников.
Сумма плоских углов при каждой вершине равна 240 градусов.
Таким образом, октаэдр имеет 8 граней, 6 вершин 12 ребер.

Контрольные вопросы:

1) Сколько правильных многогранников?

2) Куб и его свойства

3) Тетраэдр и его свойства.

4) Октаэдр и его свойства.

5) Сформулируйте формулу Эйлера и напишите его.

Самостоятельная работа № 27

"Выполнение макетов фигур(цилиндр, конус, шар)

Цель работы:

уметь:

- строить конус, цилиндр, шар.

Необходимые для работы знания:

знать:

- определение цилиндра, конуса, шара.

- свойства цилиндра, конуса, шара.

Сведения из теории:

Цилиндр - тело, ограниченное цилиндрической поверхностью и двумя кругами с границами L и L1.

Элементы цилиндра

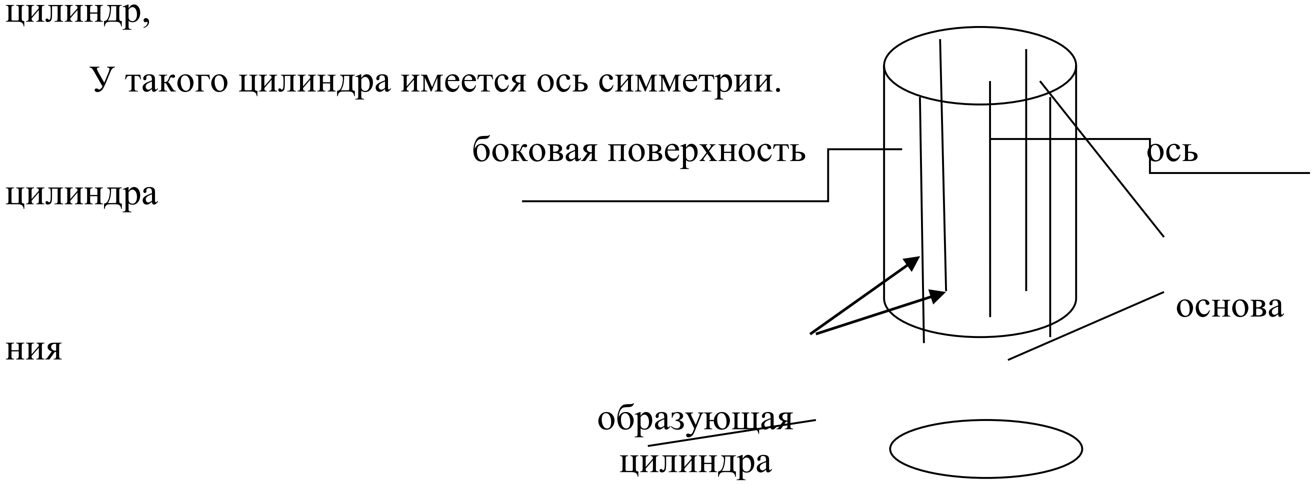
Цилиндрическая поверхность — поверхность, получаемая движением прямой (образующей) в пространстве, так выделенная точка образующей движется вдоль плоской кривой (направляющей).

Цилиндрическая поверхность называется боковой поверхностью цилиндра.

Часть цилиндра, ограниченная параллельными плоскостями, это основания цилиндра.

В большинстве случаев под цилиндром подразумевается прямой круговой цилиндр,

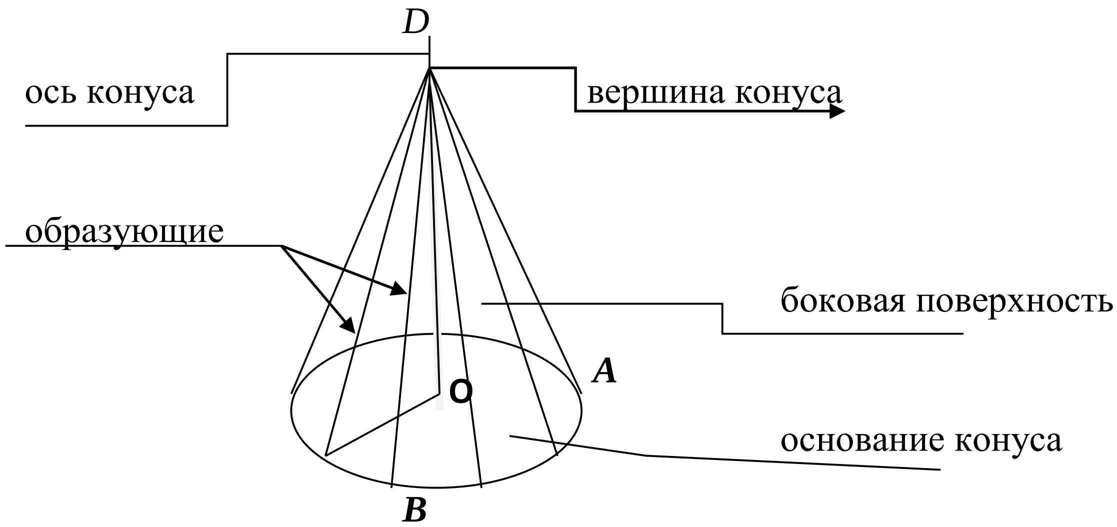
У такого цилиндра имеется ось симметрии.



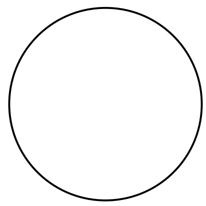
Определение конуса:

Конус - тело, ограниченное конической поверхностью и кругом с границами

Элементы конуса



Шар состоит из всех точек пространства, находящихся на расстоянии не более заданного от данной точки.



Контрольные вопросы:

1) Что называется цилиндром?

2) Что называется конусом?

3) Что такое шар?

Самостоятельная работа № 28

"Решение задач на тему: объем и его измерение, интегральная формула объема".

Цель работы:

уметь:

- вычислять объемы различных фигур

Необходимые для работы знания:

знать:

- формулы объемов тел

Сведения из теории:

Объем прямоугольного параллелепипеда: $V = abc,\ \ V = S \cdot h$

Объём призмы: $V = S \cdot h$

S -площадь основания, h - высота призмы.

Объем цилиндра: $V = \pi R^2 h$

Объем пирамиды: $\frac{1}{3} S \cdot h,$ S - площадь основания, h - высота пирамиды.

Объем конуса: $V = \frac{1}{3}\ \pi R^2 h$

Интегральная формула объема.

$$V = \int_0^h S(x) dx$$

Пример25.

Сторона основания правильной треугольной призмы равна $2\sqrt{3}$ см, а высота - 5 см. Найдите объем призмы.

Решение:

Так как призма правильная, в основании лежит правильный треугольник, следовательно равносторонний.

$V = S \cdot h,\qquad S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}\qquad S = \frac{\left(2\sqrt{3}\right)^2\sqrt{3}}{4} = \frac{12\sqrt{3}}{4} = 3\sqrt{3}$

$V = 3\sqrt{3}\ \cdot 5 = 15\sqrt{3}\text{см}^3$

Ответ: $15\sqrt{3}\text{см}^3$

Задания для самостоятельного решения:

1) Стороны основания прямоугольного параллелепипеда равны 5см и 12 см, диагональ параллелепипеда составляет с плоскостью основания угол 60°. Найдите объем параллелепипеда.

2) Основанием прямой призмы является ромб, сторона которого равна 13см, а одна из диагоналей - 24см. Найдите объём призмы, если диагональ боковой грани равна 14 см.

3) Найдите объём правильной четырехугольной пирамиды, высота которой равна 12см, а сторона основания равна13см.

4) Найдите объём цилиндра, если радиус основания равен 6см, а высота равна 8см.

5) Найдите объём конуса, если его образующая равна 17см, а диаметр основания равен 16см.

Контрольные вопросы:

1) Написать объёмы всех многогранников.

2) Написать объёмы тел вращения.

Литература:[с.356 - 367]

Самостоятельная работа №29

"Решение расчетных задач, подготовка к письменному опросу".

Цель работы:

уметь:

- вычислять расстояние между двумя точками;

- вычислять координаты середины отрезка.

Необходимые для работы знания:

знать:

- формулу расстояния между двумя точками;

- формулу координат середины отрезка.

Сведения из теории:

Расстояние d между двумя точками $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и $M_2(x_2; y_2; z_2)$ в пространстве определяется по формуле:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

Координаты середины отрезка вычисляются по формулам:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2};\ \ y = \frac{y_1 + y_2}{2};\ \ z = \frac{z_1 + z_2}{2}$$

Пример26.

Центр масс однородного стержня находится в точке C(1; -1; 5), один из его концов есть точка A(-2; -1; 7). Определить координаты другого конца стержня.

Решение:

B(*x; y; z)*

$x = 1; y = -1; z = 5$

$x_2 = -2;\ y_2 = -1;\ z_2 = 7$

$x_1 = 2x - x_2;\ y_1 = 2y - y_2;\ z_1 = 2z - z_2$

$x_1 = 2 \cdot 1 - (-2) = 4$

$y_1 = 2 \cdot (-1) - (-1) = -1$

$z_1 = 2 \cdot 5 - 7 = 3$

Ответ: B (4; -1; 3)

Задания для самостоятельного решения:

1) Даны точки A(1; -2; -3), B(2; -3; 0), D(-1; 1; -12). Вычислить расстояние между а) A и C, б) B и D, в) C и D.

2) Даны три вершины A(3; -1; 2), B(1; 2; -4), C(-1; 1; 2). Найти четвертую вершину.

3) Даны вершины A(2; -1; 4), B(3; 2; -6), C(-5; 0; 2) треугольника. Вычислить длину его медианы, проведенной из вершины A.

4) Даны вершины A(3; 2; -5), B(1; -4; 3), C(-3; 0; 1) треугольника. Найти середины его сторон.

Контрольные вопросы:

1) Напишите формулу расстояния между двумя точками.

2) Напишите формулу координат середины отрезка.

Литература:[1, с. 298 -299]

Самостоятельная работа №30

"Решение расчетных задач, подготовка к устному, письменному опросу"

Цель работы:

уметь:

- решать задачи на расстояние между двумя точками;

- вычислять координаты середины отрезка.

Необходимые для работы знания:

знать:

- формулу расстояния между двумя точками;

- формулу координат середины отрезка.

Сведения из теории:

Пусть даны две точки $A(x_1;\ y_2)$ и $B(x_2; y_2)$

Расстояние между двумя точками вычисляется по формуле:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Пример27.

Решить задачу:

Вычислите периметр треугольника, вершинами которого служат точки $A(6; 7), B(3; 3), C(1;\ -5)$

Решение:

Вычислим стороны треугольника по формуле

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$AB = \sqrt{(3-6)^2 + (3-7)^2} = \sqrt{25} = 5$

$BC = \sqrt{(1-3)^2 + (-5-3)^2} = \sqrt{68}$

$AC = \sqrt{(1-6)^2 + (-5-7)^2} = \sqrt{169} = 13$

$P = AB + BC + AC = 5 + 2\sqrt{17} + 13 = 18 + 2\sqrt{17}.$

Ответ: $18 + 2\sqrt{17}.$

Координаты середины отрезка вычисляются по формуле:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Пример28.

Треугольник задан вершинами $A(-3;-2), B(-4;\ -3), C(8;1)$. Найти медиану AD.

Решение:

$D(x;y)\ \ x = \frac{-4+8}{2} = 2;\ \ y = \frac{-3+1}{2} = -1$

$D(2;\ -1)\ AD = \sqrt{(2+3)^2 + (-1+2)^2} = \sqrt{26}.$

Ответ: $\sqrt{26}$.

Задания для самостоятельного решения:

1) Даны точки A(1; -2; -3), B(2; -3; 0), D(-1; 1; -12). Вычислить расстояние между а) A и C, б) B и D, в) C и D.

2) Даны три вершины A(3; -1; 2), B(1; 2; -4), C(-1; 1; 2). Найти четвертую вершину.

3) Даны вершины A(2; -1; 4), B(3; 2; -6), C(-5; 0; 2) треугольника. Вычислить длину его медианы, проведенной из вершины A.

4) Даны вершины A(3; 2; -5), B(1; -4; 3), C(-3; 0; 1) треугольника. Найти середины его сторон.

Контрольные вопросы:

1) По какой формуле вычисляется расстояние между двумя точками.

2) Напишите формулу координат середины отрезка.

Литература: [1, с. 298-299]

Перечень рекомендуемой литературы:

1) Богомолов Н.В. Самойленко П.И. «Математика», - М., 2009

2) А. А. Дадаян «Сборник задач по математике» Москва, 2013
3) Е. С. Кочетков, С. О. Смерчинская, В. В. Соколов «Теория вероятностей и математическая статистика» Москва, 2013
4) Н. В. Богомолов "Сборник задач по математике", Москва, Дрофа, 2009