Министерство науки и высшего образования РФ

ФГБОУВО «Заполярный государственный университет им. Н.М. Федоровского»

Кафедра технологических машин и оборудования

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Методические указания

Норильск 2022

ББК 22.1я7

Последовательности: метод. указ. / составитель А.Л. Брусков; Министерство науки и высшего образования РФ, Заполярный гос. ун-т им. Н.М. Федоровского. – Норильск: ЗГУ, 2022. – 32 с. – Библиогр.: с. 31. – Текст: непосредственный.

Цель: углубление математических знаний, отработка приёмов логических умозаключений, развитие навыков научного исследования. Предполагается наличие у студентов первоначальных сведений по теме «Последовательности» как школьного, так и вузовского уровня, на котором изучаются начала математического анализа. Для закрепления материала содержат достаточно широкую серию вопросов и задач, затрагивающих все стороны изложенной темы.

Предназначены для студентов 1–2 курсов естественнонаучного и технического профиля.

ВВЕДЕНИЕ

Из последовательностей в школьном курсе относительно подробно изучаются арифметическая и геометрическая прогрессии. В некоторых вузовских учебниках о последовательностях излагается ровно столько материала, сколько необходимо для понятия предела функции и производной. Между тем свойства последовательностей могут играть и самостоятельную роль, что позволяет углубить свои познания в естественнонаучных областях. Настоящие методические указания предназначены для студентов-первокурсников, приступающих к изучению дифференциального исчисления, но знакомых с понятием последовательности и имеющих первоначальные навыки вычисления пределов. Соответствующие разделы имеются в программах школьного курса.

Основные свойства последовательностей можно разбить на три направления: монотонные и немонотонные, ограниченные и неограниченные, сходящиеся и несходящиеся. Содержание методических указаний следует порядку перечисленных свойств. Значительное внимание уделено рекуррентно заданным, а также бесконечно большим последовательностям. Также предложены задачи для самостоятельного решения.

МОНОТОННОСТЬ

Одна из задач первого направления – исследовать последовательность на монотонность. Это можно сделать, опираясь непосредственно на определение. *Возрастающей последовательностью* называется такая, для которой выполняется: $a_{n+1} > a_n$. Если это неравенство выполняется для всех n, начиная с некоторого n_0, то последовательность считается возрастающей именно для $n \geq n_0$. По определению, убывающая последовательность – такая, для которой $a_{n+1} < a_n$, с теми же оговорками.

Пример 1. Исследовать на монотонность последовательность $\{a_n\}$, если $a_n = \dfrac{n+2}{n+1}$.

Решим неравенство $a_{n+1} > a_n$, т.е. $\dfrac{(n+1)+2}{(n+1)+1} > \dfrac{n+2}{n+1}$.

Упростим: $\dfrac{n+3}{n+2} > \dfrac{n+2}{n+1}$.

Умножим обе части на положительное $(n + 2)(n + 1)$. Получим: $(n + 3)(n + 1) > (n + 2)^2$, или $n^2 + 4n + 3 > n^2 + 4n + 4$, и, после сокращений, $3 > 4$, что неверно ни при каких значениях переменной n. А значит, при всех значениях n выполняется обратное неравенство: $a_{n+1} < a_n$, т.е. последовательность является убывающей.

К такому выводу можно прийти, преобразовав общий член последовательности, приведя его к такому виду:

$$a_n = \frac{1}{n+1} + 1.$$

Очевидно, что последовательность $\{n + 1\}$ возрастающая, а $\left\{\dfrac{1}{n+1}\right\}$ – убывающая, и если к каждому члену убывающей последовательности прибавить единицу, то она останется убывающей.

Вообще, если последовательность $\{a_n\}$ возрастающая (или убывающая) и при всех значениях n сохраняет знак, то при положительном k обратная последовательность $\left\{\dfrac{k}{a_n}\right\}$ будет убывающей (возрастающей); при отрицательном k монотонность не изменится. Если же члены последовательности имеют разные знаки, то это правило неприменимо: при смене знака возникает резкая смена монотонности. Так, для возрастающей последовательности –3, –2, –1, 1, 2… обе обратные последовательности, как $-\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, -1, 1, \frac{1}{2}...,$ так и $\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1, -1, -\frac{1}{2}...$, не являются монотонными (в первой 1 > –1, во второй –1 < 1).

Заметим, что если к каждому члену монотонной последовательности прибавить любое число (одно и то же), то монотонность не изменится.

Очевидно также, что сумма двух возрастающих (или убывающих) последовательностей $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$, т.е. последовательность с общим членом $a_n + b_n$, является возрастающей (убывающей). То же правило действует и для произведения последовательностей $\{a_n \cdot b_n\}$ с оговоркой $a_n > 0$, $b_n > 0$ и для произведения положительной последовательности на постоянный положительный множитель $\{k \cdot a_n\}$, при отрицательном множителе монотонность меняется.

Пусть $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ – данные последовательности. Рассмотрим их композицию $\{a(b_n)\}$ – сложную последовательность, последовательность от последовательности. Например, если $a_n = \frac{3}{n}$, $b_n = \operatorname{arctg} n$, то композиция $a(b_n) = \frac{3}{\operatorname{arctg} n}$.

Другая композиция: $b(a_n) = \operatorname{arctg} \frac{3}{n}$. Если обе последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ возрастающие, то понятно, что любая их композиция будет возрастающей. Если же обе последовательности убывающие, то любая их композиция будет возрастающей. Действительно, возрастанию переменной n соответствует убывание b_n, что является аргументом для убывающей последовательности a_n. Следовательно, $\{a(b_n)\}$ будет возрастающей. Легко доказать, что возрастающая последовательность от убывающей или убывающая от возрастающей будут убывающими. Так, например, последовательность с общим членом $\operatorname{arctg} \frac{3}{n}$ является убывающей, как возрастающая $\{\mathrm{arctg} n\}$ от убывающей $\left\{\frac{3}{n}\right\}$.

Иногда при исследовании последовательности на монотонность можно использовать производную. Пример: $a^n = \sqrt[3]{n+2} - \sqrt{n}$. Заменим n на x и найдём производную функции $f(x) = \sqrt[3]{x+2} - \sqrt{x}$: $\frac{d(f(x))}{dx} = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x+2)^2}} - \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Заметим, что знаменатель первой дроби больше знаменателя второй дроби, т.к. степень 2/3 > 1/2 и коэффициент 3 > 2. Так что первая дробь меньше второй, значит, производная отрицательна, и функция убывающая, а значит, и последовательность убывающая.

Пример 2. Исследовать на монотонность последовательность с общим членом $a_n = \frac{n^2 + 2n + 6}{n^2 + 2n + 9}$.

Представим общий член в виде $a_n = \frac{n^2 + 2n + 9 - 3}{n^2 + 2n + 9} = 1 - \frac{3}{n^2 + 2n + 9}$. Знаменатель дроби – возрастающая последовательность как сумма возрастающих плюс константа. Обратная к ней с положительным коэффициентом 3 – убывающая. Знак «минус» превращает её опять в возрастающую. Наконец, слагаемое 1 не меняет монотонности.

Ответ: последовательность возрастающая.

Пример 3. Исследовать на монотонность последовательность с общим членом $a_n = \frac{n^3}{n^2 - 8n + 1}$. Рассмотрим производную функции $y = \frac{x^3}{x^2 - 8x + 1}$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2(x^2 - 8x + 1) - x^3(2x - 8)}{(x^2 - 8x + 1)^2} = \frac{x^4 - 16x^3 + 3x^2}{(x^2 - 8x + 1)^2}.$$

На интервалах $(-\infty; 8 - \sqrt{61})$ и $(8 + \sqrt{61}; +\infty)$ производная неотрицательна, функция возрастает, между этими интервалами функция убывает. Отметим, что $8 - \sqrt{61}$ э $(0;1)$, $8 + \sqrt{61}$ э $(15; 16)$. Значит, последовательность с натуральным аргументом n убывает на промежутке $n \ni \{1, 2, ..., 15\}$ и возрастает при $n \geq 16$. Заметим, что последовательность начинает возрастать именно при $n = 16$, поскольку непосредственный подсчёт показывает, что $a_{15} > a_{16}$. Очевидно к тому же, что a_{16} будет наименьшим членом последовательности.

Пример 4. Исследовать на монотонность, если $a_n = \sqrt{n^2 + 3n} - n$.

Преобразуем общий член к виду $a_n = \dfrac{3n}{\sqrt{n^2 + 3n} - n} = \dfrac{3}{\sqrt{1 + \dfrac{3}{n}} + 1}$.

Последовательность $\dfrac{3}{n}$ убывающая, слагаемое 1 на эту монотонность не влияет. $\sqrt{1 + \dfrac{3}{n}}$ остаётся убывающей (возрастающая $\sqrt{n}$ от убывающей $1 + \dfrac{3}{n}$ есть убывающая). Ещё одна единица также не меняет монотонности. Наконец, положительное 3 «делится на убывающую», получается возрастающая последовательность.

Пример 5. Исследовать на монотонность, если $a_n = \dfrac{3^n - 2^n}{3^{n-1} + 2^{n-1}}$.

Преобразуем общий член: $a_n = \dfrac{3 \cdot 3^{n-1} - 2 \cdot 2^{n-1}}{3^{n-1} + 2^{n-1}} =$

$$= \frac{(3 \cdot 3^{n-1} - 3 \cdot 2^{n-1}) - 5 \cdot 2^{n-1}}{3^{n-1} + 2^{n-1}} = 3 - \frac{5 \cdot 2^{n-1}}{3^{n-1} + 2^{n-1}} = 3 - \frac{5}{\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} + 1}.$$

Последовательность $\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-1}$ возрастающая, как степень с основанием $3/2 > 1$. Слагаемое 1 не меняет монотонности. Обратная последовательность $\dfrac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} + 1}$ с положительным множителем 5 есть убывающая. Знак «минус» превращает её в возрастающую, слагаемое 3 не меняет монотонности.

Ответ: возрастающая.

Пример 6. Исследовать на монотонность, если $a_n = \dfrac{70^n}{n^3}$.

Рассмотрим частное $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{70^{n+1}}{(n+1)^3} \div \dfrac{70^n}{n^3} = \dfrac{70n^3}{(n+1)^3}$.

Числитель полученной дроби будет больше знаменателя при $70n^3 > (n+1)^3$, что равносильно $\sqrt[3]{70}\cdot n > n + 1$ или $n > \dfrac{1}{\sqrt[3]{70} - 1}$.

Поскольку $\sqrt[3]{70}-1 \in (3;4)$, непосредственным подсчётом устанавливаем, что $a_4 > a_3$, поэтому последовательность будет возрастающей, начиная с a_3. Заметим при этом, что a_3 будет наименьшим членом последовательности.

ОГРАНИЧЕННОСТЬ

Если существует число m такое, что все члены последовательности удовлетворяют неравенству $a_n \geq m$, то последовательность называется *ограниченной снизу*. В последнем примере как раз выполняется $a_n \geq a_3$. Последовательность ограничена снизу. Если существует число M такое, что при всех n выполняется $a_n \leq M$, последовательность называется *ограниченной сверху*, а при наличии двух чисел m и M таких, что $m \leq a_n \leq$ M, она называется *просто ограниченной*. Однако часто в случае односторонней ограниченности говорят «ограниченная», а «сверху» или «снизу» подразумевают.

Неограниченность, например, сверху, означает, что для любого числа M ***найдутся*** (т.е. необязательно все) члены последовательности a_k, для которых будет $a_k > M$. Аналогично для неограниченности снизу.

Пример 7. Исследовать на ограниченность последовательность с общим членом $a_n = \frac{n+2}{2n-13}$.

Решим неравенство $a_n > M$, где M – достаточно большое, вернее, сколь угодно большое число. Решение вида $n > n_0$ будет говорить о неограниченности сверху, а решение вида $n < n_0$ – о том, что при всех $n \geq n_0$ выполняется неравенство $a_n \leq M$. Среди членов с номерами от 1 до n_0 должен быть наибольший, скажем, n_k. Тогда для *всех* членов последовательности будет выполняться хотя бы одно из неравенств: $a_n \leq M$, $a_n \leq a_k$, что будет говорить об ограниченности сверху. Аналогичные результаты можно получить, решая неравенство $a_n < M$, что и проделаем.

$\frac{n+2}{2n-13} < M$. Видно, что при n = 1, 2,…, 6 члены последовательности отрицательны, и неравенство непременно выполняется (напомним, что M – достаточно большое положительное число). Для $n > 6$ имеем равносильное неравенство $n + 2 < M(2n - 13)$, откуда $n > \frac{13M+2}{2M-1}$. Если в качестве n_0 взять целую часть последней дроби, то при всех $n > n_0$ выполняется $a_n < M$. Среди членов с номерами от 1 до n_0 (включая ранее упомянутые отрицательные) есть наибольший, скажем, a_k. Поэтому для этих членов будет выполняться неравенство $a_n \le a_k$. Из всего этого следует, что последовательность ограничена сверху.

То, что эта последовательность ограничена и снизу, видно по числу отрицательных членов: 6. Среди них найдётся наименьший, $a_1 = -3/11$, так что для всех членов имеет место неравенство $a_n \ge -3/11$.

Ограниченность последовательности $\left\{\dfrac{n+2}{2n-13}\right\}$ можно увидеть, преобразовав общий член. Ограниченность снизу просматривается и без преобразований: по конечному числу отрицательных членов. Для положительных членов представим общий член в виде $a_n = \dfrac{1}{2} + \dfrac{8{,}5}{2n-13}$, из чего видно, что последовательность убывающая. Значит, первый же положительный член является наибольшим, и все члены последовательности меньше его, что и требовалось обнаружить.

Пример 8. Исследовать на ограниченность, если $a_n = \sqrt[3]{8n - n^3} + \sqrt[3]{8n + n^3}$.

Преобразуем общий член: $a_n = \sqrt[3]{n^3 + 8n} - \sqrt[3]{n^3 - 8n}$. При натуральных n первое слагаемое по модулю больше второго, поэтому $a_n > 0$, и, значит, последовательность ограничена снизу.

Прежде чем говорить об ограниченности сверху, рассмотрим несколько утверждений:

1. Если последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ ограничены снизу, то их сумма ограничена снизу. Для доказательства почленно сложим два неравенства: $a_n \ge m_1$, $b_n \ge m_2$, получим $a_n + b_n \ge m_1 + m_2$. Аналогично в случае ограниченности сверху, а также для любого конечного количества последовательностей.

2. Если последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ с положительными членами ограничены снизу, то их произведение ограничено снизу. Для доказательства достаточно почленно перемножить два соответствующих неравенства. Аналогично для ограниченности сверху.

3. Если последовательность $\{a_n\}$ с положительными членами ограничена снизу, то обратная последовательность $\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$ ограничена сверху, и наоборот. Из неравенства $a_n \geq m$ следует $\dfrac{1}{a_n} \leq \dfrac{1}{m}$, что и подтверждает сказанное.

Итак, $a_n = \sqrt[3]{n^3 + 8n} - \sqrt[3]{n^3 - 8n}$. Умножим и разделим на неполный квадрат суммы:

$$a_n = \frac{16n}{\left(\sqrt[3]{n^3 + 8n}\right)^2 + \sqrt[3]{n^3 + 8n} \cdot \sqrt[3]{n^3 - 8n} + \left(\sqrt[3]{n^3 - 8n}\right)} =$$

$$= \frac{16}{n \cdot \left(\left(\sqrt[3]{1 + \dfrac{8}{n^2}}\right)^2 + \sqrt[3]{1 - \dfrac{64}{n^4}} + \left(\sqrt[3]{1 - \dfrac{8}{n^2}}\right)^2\right)}.$$

Последовательность

$$\left\{\left(\sqrt[3]{1 + \frac{8}{n^2}}\right)^2 + \sqrt[3]{1 - \frac{64}{n^4}} + \left(\sqrt[3]{1 - \frac{8}{n^2}}\right)\right\}.$$

ограничена снизу как сумма ограниченных снизу последовательностей. Заметим к тому же, что она не имеет отрицательных членов. Последовательность $\{n\}$ также ограничена снизу ($n \geq 1$). Произведение положительных ограниченных снизу последовательностей является ограниченной снизу последовательностью. Значит, обратная к ней последовательность вместе с положительным множителем 16 будет последовательностью, ограниченной сверху.

Пример 9. Исследовать на ограниченность, если $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \dfrac{2}{3}a_n + \dfrac{1}{a_n}$.

Поскольку $a_n > 0$, что очевидно, то последовательность ограничена снизу.

Возьмём число 2 (впрочем, можно взять любое другое достаточно большое число) и рассмотрим неравенство $a_{n+1} > 2$, т.е. $\frac{2}{3}a_n + \frac{1}{a_n} > 2$, которое равносильно следующему: $2a_n^2 - 6a_n + 3 > 0$. Решив его относительно a_n, получим:

$$a_n < \frac{3-\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}63$$

или

$$a_n > \frac{3+\sqrt{3}}{2} \approx 2{,}37\,.$$

Это значит, что какой-то член последовательности окажется больше 2, если предыдущий член удовлетворяет одному из двух последних неравенств. Но такое невозможно, поскольку $a_1 = 1$ не удовлетворяет ни одному из этих неравенств. *Вывод:* всякое $a_n < 2$, т.е. последовательность ограничена сверху.

СХОДИМОСТЬ

Известное определение предела часто используется в примерах, где требуется доказать, что некоторое число является пределом данной последовательности. Число A называется *пределом последовательности* $\{a_n\}$, если для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ найдётся такое n_0, что при всех $n > n_0$ выполняется неравенство $|a_n - A| < \varepsilon$.

Пример 10. Доказать, что число 2 является пределом последовательности с общим членом $a_n = \dfrac{2n-3}{n+4}$.

Пусть $\varepsilon > 0$ – сколь угодно малое число. Составим неравенство $\left|\dfrac{2n-3}{n+4} - 2\right| < \varepsilon$ и решим его относительно переменной n. Сначала упростим. Вычтя под знаком модуля 2, получим $\left|\dfrac{-11}{n+4}\right| < \varepsilon$. Поскольку n натуральное, то $\left|\dfrac{-11}{n+4}\right| = \dfrac{11}{n+4}$. Тогда $\dfrac{11}{n+4} < \varepsilon$ или $11 < \varepsilon(n+4)$, откуда $n > \dfrac{11-4\varepsilon}{\varepsilon}$. Это значит, что существует такое натуральное n_0 (а именно $\left|\dfrac{11-4\varepsilon}{\varepsilon}\right| + 1$, начиная с которого все члены последовательности оказываются в ε-интервале числа 2, т.е. $a_n \in (2 - \varepsilon;\ 2 + \varepsilon)$, что и означает, что число 2 – предел данной последовательности.

Можно ошибочно подумать, что точно такой же результат получится, если предположить, что пределом той же последовательности является, скажем, число 1. Попробуем «доказать» такую версию. Составим и решим известное неравенство: $\left|\dfrac{2n-3}{n+4} - 1\right| < \varepsilon$, $\left|\dfrac{n-7}{n+4}\right| < \varepsilon$. При достаточно больших значениях n, а вообще говоря, при $n > 7$ $\left|\dfrac{n-7}{n+4}\right| = \dfrac{n-7}{n+4}$, так что неравенство равносильно $\dfrac{n-7}{n+4} < \varepsilon$, или $n - 7 < \varepsilon(n + 4)$, откуда $\varepsilon n - n > -7 - 4\varepsilon$, $n(\varepsilon - 1) > -7 - 4\varepsilon$, и, казалось бы, получается $n > \frac{-7-4\varepsilon}{\varepsilon-1}$, или $n > \frac{-7+4\varepsilon}{1-\varepsilon}$. Но это ошибка. Ведь число ε какое угодно, но *малое*, меньшее не только единицы, но и любого фиксированного, близкого к нулю числа. Так что величина (ε – 1), на которую делим обе части неравенства, отрицательна, и при делении требуется знак «>» поменять на «<». И тогда получится верное решение $n < \frac{-7-4\varepsilon}{\varepsilon-1}$, или $n < \frac{7+4\varepsilon}{1-\varepsilon}$. А это означает, что исходное неравенство $\left|\frac{2n-3}{n+4}-1\right| < \varepsilon$ выполняется не для всех n, начиная с какого-то n_0, а до какого-то значения n. То есть в ε-интервале ($1 - \varepsilon$; $1 + \varepsilon$) оказывается конечное число членов последовательности, а значит, число 1 не является пределом данной последовательности. Заметим, что в других случаях при правильном решении в ответе типа $n < \frac{7+4\varepsilon}{1-\varepsilon}$ может вообще не оказаться натуральных чисел.

Таким образом, чтобы воспользоваться определением для доказательства того, что число A является пределом последовательности, прежде надо заполучить это число или, по крайней мере, держать его в подозрении.

Пример 11. Найти предел последовательности с общим членом $a_n = \frac{3n+1}{n+2}$.

Составим неравенство:

$$\left|\frac{3n+1}{n+2} - A\right| < \varepsilon,$$

где A – искомый предел; ε – сколь угодно малое положительное число.

Будем искать такое A, при котором это неравенство имеет решение в виде бесконечного интервала $n > ?$ – именно *больше* чего-то. Среди этого «чего-то» обязательно найдётся наименьшее целое (вернее натуральное) число, которое обозначим как n_0.

Учитывая, что при натуральных n знаменатель $n + 2 > 0$, заменим наше неравенство равносильным: $|3n + 1 - An - 2A| < n\varepsilon + 2\varepsilon$, что в свою очередь равносильно системе:

$$\begin{cases} 2A - 1 - 2\varepsilon < n(3 - A + \varepsilon); \\ n(3 - A - \varepsilon) < 2A - 1 + 2\varepsilon. \end{cases}$$

Решение этой системы зависит от знаков выражений $3 - A + \varepsilon$ и $3 - A - \varepsilon$. Понятно, что первое выражение больше второго.

Заметим также, что $2A - 1 - 2\varepsilon < 2A - 1 + 2\varepsilon$.

Рассмотрим 4 случая:

1. $3 - \text{A} + \varepsilon > 0$, $3 - A - \varepsilon > 0$. Тогда решением системы будет интервал $\left(\dfrac{2A-1-2\varepsilon}{3-A+\varepsilon}; \dfrac{2A-1+2\varepsilon}{3-A-\varepsilon}\right)$, который имеет право на существование, поскольку левая дробь меньше правой. Но это решение не устраивает: нужен бесконечный интервал.

2. $3 - A + \varepsilon > 0$, $3 - A - \varepsilon > 0$. В этом случае решением должно быть пересечение двух интервалов: $\left(-\infty; \dfrac{2A-1-2\varepsilon}{3-A+\varepsilon}\right)$ и $\left(\dfrac{2A-1+2\varepsilon}{3-A-\varepsilon}; +\infty\right)$. Но эти интервалы не пересекаются, так как правый конец левого меньше, чем левый конец правого. Значит, решения нет вообще.

3. $3 - A + \varepsilon < 0$, $3 - A - \varepsilon > 0$. Здесь решением будет пересечение двух интервалов: $\left(-\infty; \dfrac{2A-1-2\varepsilon}{3-A+\varepsilon}\right)$ и $\left(-\infty; \dfrac{2A-1+2\varepsilon}{3-A-\varepsilon}\right)$, а именно первый из них. Это опять не устраивает: т.к. нужен интервал не от минус бесконечности до …, а от … до плюс бесконечности.

4. $3 - A + \varepsilon > 0$, $3 - A - \varepsilon < 0$. Наконец, получаем то, что ожидали. Решением будет пересечение двух интервалов: $\left(\dfrac{2A-1-2\varepsilon}{3-A+\varepsilon}; +\infty\right)$ и $\left(\dfrac{2A-1+2\varepsilon}{3-A-\varepsilon}; +\infty\right)$, а именно второй из них, в котором обязательно содержатся натуральные числа, а среди них и наименьшее n_0. Система $3 - A + \varepsilon > 0$, $3 - A - \varepsilon < 0$ означает, что число 3 находится в середине интервала $(A - \varepsilon; A + \varepsilon)$, а результат данного решения говорит о том, что, начиная с некоторого n_0, все члены последовательности $\left\{\dfrac{3n+1}{n+2}\right\}$ находятся в том же интервале, и

так будет при любом сколь угодно малом положительном ε. Значит, число 3 является пределом последовательности.

Рассмотрим пример вычисления предела за рамками определения. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}$. Начнём с того, что при $n > 1$ выполняется неравенство $\sqrt[n]{n} > 1$. Обозначим $\sqrt[n]{n} - 1 = a_n$, т.е. $\sqrt[n]{n} = 1 + a_n$. Возведём обе части этого равенства в n-ю степень:

$$n = 1 + n\cdot a_n + \frac{n(n-1)}{2!}a_n^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a_n^3 + \ldots$$

Так как сумма положительных слагаемых больше любого отдельного слагаемого, то $n > \frac{n(n-1)}{2!}a_n^2$, откуда $a_n < \sqrt{\frac{2}{n-1}}$. Но поскольку $\frac{2}{n-1} \to 0$, то и $\sqrt{\frac{2}{n-1}}$, т.е. $a_n \to 0$, а значит, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$.

Рассмотрим предел функции:

$$\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} e^{\ln x^{x}} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{\ln x}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}}.$$

Далее воспользуемся правилом Лопиталя:

$$e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}} = e^{0} = 1.$$

При исследовании на сходимость большую роль может сыграть теорема Вейерштрасса, которая соединяет монотонность, ограниченность и сходимость в одно целое: если последовательность монотонна и ограничена, то она имеет предел. При этом если последовательность возрастающая, то она должна быть ограниченной сверху, а если убывает, то – снизу. Пределом в обоих случаях будет точная граница.

Ещё одна теорема (совершенно очевидная): $\lim\limits_{n\to\infty}a_n = \lim\limits_{n\to\infty}a_{n+1}$, что означает, что если последовательность $\{a_n\}$ имеет предел (в том числе и бесконечный), то последовательность $\{a_{n+1}\}$ имеет тот же предел. Вместо единицы может быть любое натуральное число k, так что $\lim\limits_{n\to\infty}a_n = \lim\limits_{n\to\infty}a_{n+k}$.

Пример 12. Найти предел последовательности с общим членом $a_n = \dfrac{n^k}{b^n}$, если этот предел существует; k, $b > 0$.

Рассмотрим отношение:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^k b^n}{b^{n+1} n^k} = \frac{(n+1)^k}{bn^k}.$$

Решим неравенство $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ относительно n, т.е. поставим вопрос: при каких значениях n последовательность возрастает:

$$\frac{(n+1)^k}{bn^k} >,\ (n+1)^k > bn^k,\ n+1 > n \cdot \sqrt[k]{b}.$$

Дальше рассмотрим два случая: $b < 1$ и $b > 1$ (случай $b = 1$ очевиден: $a_n \to +\infty$).

При $b < 1$ $n > \dfrac{-1}{1-\sqrt[k]{b}}$, т.е. n – любое натуральное число. При всех натуральных n последовательность возрастает. Заменив b на $\dfrac{1}{c}$, где $c > 1$, получим: $a_n = n^k c^n \to +\infty$, последовательность не является ограниченной и не имеет предела.

Если $b > 1$, то $n < \dfrac{1}{\sqrt[k]{b}-1}$, т.е. последовательность возрастает, начиная с $n = 1$ до целой части величины $\dfrac{1}{\sqrt[k]{b}-1}$, при всех n от $\left|\dfrac{1}{\sqrt[k]{b}-1}\right|$ до $+\infty$ последовательность убывает. Её ограниченность снизу очевидна: $a_n < 0$. По теореме Вейерштрасса есть предел. Обозначим его A. Таким образом, $a_n \to A$, а также $a_{n+1} \to A$. Заметим, что убывающая положительная последовательность может иметь только конечный предел.

Отношение $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{(n+1)^k}{bn^k}$ преобразуем к виду $a_{n+1} = \dfrac{(n+1)^k}{bn^k} \cdot a_n$ и устремим n к $+\infty$: поскольку $\dfrac{(n+1)^k}{bn^k} \to \dfrac{1}{b}$, то $A = \dfrac{1}{b} \cdot A$. Это равенство возможно лишь при $A = 0$.

Ответ: предел существует при $b > 1$, и он равен нулю.

Пример 13. Исследовать на сходимость последовательность, которая задана рекуррентно:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right),\ x_1 = a,\ a > 0.$$

Рассмотрим неравенство $x_{n+1} > x_n$,
то есть

$$\frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) > x_n,$$

которое равносильно $a > x_n^2$ или $x_n < \sqrt{a}$. Это значит, что последовательность будет возрастать, начиная с x_n, если $x_n < \sqrt{a}$. Следовательно, если $x_n > \sqrt{a}$, то она будет убывать. Посмотрим, возможно ли, чтобы x_n (а это всё равно, что x_{n+1}) было больше $\sqrt{a}$. Решим неравенство $x_{n+1} > \sqrt{a}$:

$$\frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) > \sqrt{a};\quad x_n^2 + a > 2x_n\sqrt{a};\quad \left(x_n - \sqrt{a}\right)^2 > 0.$$

Последнее неравенство выполняется всегда, за исключением случая, когда $x_n = \sqrt{a}$, тогда неравенство обращается в равенство, но тогда и все следующие члены будут равны $\sqrt{a}$. Значит, если последнее неравенство выполняется всегда, то последовательность является убывающей. А если задать $x_1 < \sqrt{a}$? Тогда

$$x_2 = \frac{1}{2}\left(x_1 + \frac{a}{x_1}\right) > \sqrt{a},$$

в чём легко убедиться: $x_1^2 + a > 2x_1\sqrt{a}$, $\left(x_1 - \sqrt{a}\right)^2 > 0$, что очевидно. Итак, если даже первый член последовательности будет меньше $\sqrt{a}$, то второй будет неизбежно больше, и последовательность будет убывать, начиная со второго члена, оставаясь больше $\sqrt{a}$ (ограничена снизу). Вывод: она имеет предел. Этот предел обозначим A. Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1}$, то $\frac{1}{2}\left(A + \frac{a}{A}\right) = A$. Решив это уравнение относительно A, получим: $A = \sqrt{a}$.

Пример 14. Исследовать на сходимость последовательность, если $a_{n+1} = \frac{a_n + 1}{2}$, $a_1 = 3$.

Рассмотрим неравенство $a_{n+1} < a_n$: $\frac{a_n + 1}{2} < a_n$, что равносильно $a_n > 1$. Это значит, что если какой-то n-й член последовательности больше единицы, то следующий $(n + 1)$-й будет меньше чем n-й; налицо признак убывания. Но при этом $(n + 1)$-й может оказаться меньше единицы, и тогда характер монотонности изменится: $(n + 2)$-й член обязан быть уже больше $(n + 1)$-го. Проверим, может ли какой-то член последовательности быть меньше единицы: $\frac{a_n + 1}{2} < 1$, что равносильно $a_n < 1$. Значит, член последовательности может оказаться меньше единицы, если предыдущий член меньше единицы. В данном случае, поскольку $a_1 = 3 > 1$, все члены последовательности будут больше единицы. Это значит, что последовательность, во-первых, убывающая, во-вторых, ограничена снизу. Согласно теореме Вейерштрасса, она имеет предел, который обозначим буквой A. По свойствам сходящихся последовательностей $A = \frac{A + 1}{2}$, откуда $A = 1$.

Пример 15. Исследовать на сходимость последовательность

$$x_1 = \frac{a}{2};\ x_2 = \frac{a}{2} - \frac{x_1^2}{2};\ x_3 = \frac{a}{2} - \frac{x_3^2}{2};\ x_n = \frac{a}{2} - \frac{x_{n-1}^2}{2};\ a \in (0;\ 1).$$

Рассмотрим разность: $x_2 - x_1 = \frac{a}{2} - \frac{x_1^2}{2} - \frac{a}{2} = -\frac{x_1^2}{2} < 0$.

Кроме того, $x_2 = \frac{a}{2} - \frac{x_1^2}{2} = \frac{a}{2} - \frac{a^2}{8} = \frac{a(4-a)}{8} > 0$.

Значит, $0 < x_2 < x_1$.

Далее $x_3 - x_2 = \frac{a}{2} - \frac{x_2^2}{2} - \frac{a}{2} + \frac{x_1^2}{2} = \frac{x_1^2 - x_2^2}{2} > 0$.

Значит, $x_3 > x_2$.

Далее $x_3 - x_1 = \frac{a}{2} - \frac{x_2^2}{2} - \frac{a}{2} = -\frac{x_2^2}{2} < 0$. Значит, $x_3 < x_1$, и, следовательно, $x_2 < x_3 < x_1$.

Продолжим: $x_4 - x_3 = \frac{x_2^2 - x_3^2}{2} < 0$, значит, $x_3 > x_4$; $x_4 - x_2 = \frac{x_1^2 - x_3^2}{2} > 0$, значит, $x_4 > x_2$. Следовательно, $x_2 < x_4 < x_3$.

Точно так же получим $x_4 < x_5 < x_3$.

Убедимся, что $x_{2n} < x_{2n+1} < x_{2n-1}$, а $x_{2n} < x_{2n+2} < x_{2n+1}$, то есть, что последовательность $x_1, x_3, x_5, \ldots, x_{2n-1}, \ldots$ убывающая, а $x_2, x_4, x_6, \ldots, x_{2n}, \ldots$ – возрастающая. Для этого достаточно, предположив справедливость этого утверждения для всех натуральных чисел, меньше либо равных некоторого n, доказать его справедливость и при $n + 1$. Иными словами, надо доказать, что из двух цепочек неравенств $x_{2n} < x_{2n+1} < x_{2n-1}$ и $x_{2n} < x_{2n+2} < x_{2n+1}$ следуют две другие цепочки: $x_{2n+2} < x_{2n+3} < x_{2n+1}$ и $x_{2n+2} < x_{2n+4} < x_{2n+3}$. Тем самым будет реализован метод математической индукции.

Имеем: $x_{2n+2} - x_{2n+1} = \frac{x_{2n}^2 - x_{2n+1}^2}{2} < 0$, значит, $x_{2n+2} < x_{2n+1}$;

$x_{2n+3} - x_{2n+2} = \frac{x_{2n+1}^2 - x_{2n+2}^2}{2} < 0$, значит, $x_{2n+3} > x_{2n+2}$;

$x_{2n+3} - x_{2n+1} = \frac{x_{2n}^2 - x_{2n+2}^2}{2} < 0$, значит, $x_{2n+3} < x_{2n+1}$.

Следовательно, $x_{2n+2} < x_{2n+3} < x_{2n+1}$;

$x_{2n+2} - x_{2n+3} = \frac{x_{2n+2}^2 - x_{2n+1}^2}{2} < 0$, значит, $x_{2n+2} < x_{2n+3}$;

$x_{2n+4} - x_{2n+3} = \frac{x_{2n+2}^2 - x_{2n+3}^2}{2} < 0$, значит, $x_{2n+4} < x_{2n+3}$;

$x_{2n+2} - x_{2n+4} = \dfrac{x^2_{2n+3} - x^2_{2n+1}}{2} < 0$, значит, $x_{2n+2} < x_{2n+4}$.

Следовательно, $x_{2n+2} < x_{2n+4} < x_{2n+3}$, что и требовалось доказать.

По теореме Вейерштрасса эти монотонные и ограниченные последовательности имеют пределы. Обозначим их как A и B. В равенствах $x_{2n+1} = \dfrac{a}{2} - \dfrac{x^2_{2n}}{2}$ и $x_{2n} = \dfrac{a}{2} - \dfrac{x^2_{2n-1}}{2}$ перейдём к пределу при $n \to \infty$. Получим: $A = \dfrac{a}{2} - \dfrac{B^2}{2}$, $B = \dfrac{a}{2} - \dfrac{A^2}{2}$. Решим эту систему. После вычитания имеем: $A - B = \dfrac{A^2 - B^2}{2}$, или $(A - B)\ (1 - \dfrac{A + B}{2}) = 0$. Так как при любом натуральном n $x_n \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$, то $A + B < 2$, и скобка $(1 - \dfrac{A + B}{2}) = 0$ не может равняться нулю. Значит, $A - B = 0$, после чего получаем, что $A = B = \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt{1 + a} - 1$.

Запись $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ означает, что каково бы ни было положительное число M, найдётся такое n_0, что при всех $n > n_0$ выполняется неравенство $x_n > M$. В этом случае говорят, что последовательность имеет предел, равный плюс бесконечности. На самом деле, согласно определению, предела, как такового, нет, но запись $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ наряду с $x_n \to +\infty$ употребляется. Ещё говорят, что последовательность расходится к плюс бесконечности. Аналогично, когда последовательность расходится к минус бесконечности. Это означает, что каково бы ни было положительное число M, найдётся такое n_0, что при всех $n > n_0$ выполняется неравенство $x_n < -M$. В краткой записи: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$ или $x_n \to -\infty$.

Докажем с помощью определения, что последовательность с общим членом $x_n = n^2$ расходится к плюс бесконечности. Пусть M – сколь угодно большое положительное число. Составим неравенство $n^2 > M$, которое выполняется при всех $n > \sqrt{M}$, т.е. найдётся такое n_0, а именно

$[\sqrt{M}] + 1$, для которого при всех $n > n_0$ выполняется неравенство $x_n > M$.

Докажем, что последовательность с общим членом $x_n = 1 - \sqrt{n}$ расходится к минус бесконечности. Составим неравенство $1 - \sqrt{n} < -M$ и решим его относительно n. Получим: $n > (1 + M)^2$. Искомое $n_0 = [(1 + M)^2] + 1$.

Следует различать три вида похожих друг на друга последовательностей: расходящиеся к плюс или минус бесконечности, бесконечно большие последовательности и неограниченные. Определения первых уже рассмотрели.

Бесконечно большими последовательностями (или просто расходящимися к *бесконечности*) называются те, для которых $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n| = +\infty$. Для таких последовательностей приняты записи: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ или $x_n \to \infty$ (без знака «плюс» или «минус»). Примером бесконечно большой может служить последовательность с общим членом $x_n = (-1)^n n^2$: -1; 4; -9; 16; -25; ... и т.д. Другое истолкование бесконечно большой последовательности: все члены последовательности, начиная с некоторого n_0, находятся вне конечного отрезка $[-M;\ M]$, а внутри его может содержаться лишь конечное число членов. Всякая расходящаяся к плюс или минус бесконечности последовательность, очевидно, является одновременно и бесконечно большой, обратное неверно, примером чего может служить только что приведённая последовательность.

Для неограниченной, скажем, сверху последовательности для любого сколь угодно большого M *найдётся* такой член последовательности x_k, который больше M. Поэтому всякая бесконечно большая или расходящаяся к плюс или минус бесконечности последовательность является одновременно и неограниченной. Вместе с тем существуют неограниченные последовательности, не являющиеся бесконечно большими или расходящимися к плюс или минус бесконечности. Пример: последовательность с общим членом $x_n = n \cdot \sin\dfrac{\pi n}{2}$, члены которой при нечётных n становятся бесконечно большими по абсолютной величине, а при чётных – равны нулю.

Для бесконечно больших или расходящихся к плюс или минус бесконечности последовательностей характерны соотношения: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{x_n}=0$. Обратно, если a_n – бесконечно малая последовательность ($a_n\to 0$), то при сохранении соответствующего знака $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}=\pm\infty$. В символической записи это выглядит так: $\frac{1}{\infty}=0,\ \frac{1}{0}=\infty$.

О свойствах последовательностей с бесконечными пределами

Вместо «последовательность с общим членом x_n» будем писать «последовательность $\{x_n\}$». Очевидны следующие утверждения:

1. Если $a_n\to+\infty$, а последовательность $\{b_n\}$ либо ограничена, либо ограничена снизу, то $\{a_n+b_n\}\to+\infty$.

2. Если $a_n\to-\infty$, а последовательность $\{b_n\}$ либо ограничена, либо ограничена сверху, то $\{a_n+b_n\}\to-\infty$.

3. Если $a_n\to+\infty$, а последовательность $\{b_n\}$ такова, что $b_n>M>0$ при любом n, то $a_nb_n\to+\infty$.

4. Если $a_n\to+\infty$, а последовательность $\{b_n\}$ такова, что $0<b_n<M$ при любом n, то $\frac{a_n}{b_n}\to+\infty$.

5. Если $a_n\to 0$, а последовательность $\{b_n\}$ такова, что $|b_n|>M>0$ при любом n, то $\frac{a_n}{b_n}\to 0$.

6. Если $|a_n|<M$, а последовательность $\{b_n\}$ такова, что $|b_n|\to+\infty$ при любом n, то $\frac{a_n}{b_n}\to 0$.

7. Если $|b_n|\to 0$, а последовательность $\{a_n\}$ такова, что $|a_n|>\mathrm{M}>0$ при любом n, то $\frac{a_n}{b_n}\to+\infty$.

8. Если $a_n\to+\infty$, а последовательность $\{b_n\}$ такова, что $b_n\geq a_n$ при любом n, то $|b_n|\to+\infty$.

Например, если $a_n = \sqrt{n}$, $b_n = 2\cos(n+1)+3$, то $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n) = +\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n b_n) = +\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = +\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n} = 0$.

Во многих случаях имеют место следующие так называемые неопределённости, когда вопрос о пределе последовательности остаётся открытым и требует исследования – раскрытия неопределённости:

1. Требует исследования вопрос о пределе последовательности $\{a_n - b_n\}$, если $a_n \to +\infty$, $b_n \to +\infty$, неопределённость вида $\infty - \infty$.

2. $\{a_n b_n\}$, если $a_n \to +\infty$, $b_n \to 0$: неопределённость вида $\infty \cdot 0$.

3. $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$, если $a_n \to +\infty$, $b_n \to +\infty$ неопределённость вида $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$.

4. $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$, если $a_n \to 0$, $b_n \to 0$ неопределённость вида $\left\{\frac{0}{0}\right\}$.

5. $\{a^n b^n\}$, если $a_n \to 0$, $b_n \to 0$ неопределённость вида 0^0.

6. $\{a^n b^n\}$, если $a_n \to 1$, $b_n \to +\infty$ неопределённость вида 1^∞.

Однако часто указанное исследование довольно простое. Например, если $a_n = n + 5$, $b_n = n + 1$, $c_n = n$, $d_n = 3n$, $f_n = n^2$, то следующие пределы легко вычисляются, раскрывая соответствующие неопределённости:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty}(n+5-n-1) = 4;$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n - c_n) = \lim_{n\to\infty}(n+5-n) = 5;$$

$$\lim_{n\to\infty}(b_n - c_n) = \lim_{n\to\infty}(n+1-n) = 1;$$

$$\lim_{n\to\infty}(c_n - f_n) = \lim_{n\to\infty}(n-n^2) = \lim_{n\to\infty}n(1-n) = -\infty;$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+5}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{5}{n}}{1+\frac{1}{n}}=1;$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{c_n}{d_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{3n}=\frac{1}{3};$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{c_n}{f_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0;$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f_n}{d_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{3n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{3}=+\infty.$$

Если последовательности $a_n=-n$, $f_n=-n^2$, $d_n=-\sqrt{n}$ бесконечно большие, а последовательности $b_n=\frac{1}{n}$, $c_n=\frac{5}{n}$ бесконечно малые, то следующие пределы легко вычисляются:

$$\lim_{n\to\infty}(a_nb_n)=\lim_{n\to\infty}(-n)\left(\frac{1}{n}\right)=-1;$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_nc_n)=\lim_{n\to\infty}\left(-n\cdot\frac{5}{n}\right)=-5;$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{d_n}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{-\sqrt{n}}{-n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0;$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_nd_n)=\lim_{n\to\infty}(-n)(-\sqrt{n})=\lim_{n\to\infty}n\sqrt{n}=+\infty;$$

$$\lim_{n\to\infty}(f_nb_n)=\lim_{n\to\infty}(-n^2)\left(\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}(-n)=-\infty;$$

$$\lim_{n\to\infty}(d_nb_n)=\lim_{n\to\infty}(-\sqrt{n})\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=0;$$

$$\lim_{n\to\infty}(f_nc_n)=\lim_{n\to\infty}(-n^2)\frac{5}{n}=\lim_{n\to\infty}(-5n)=-\infty;$$

$$\lim_{n\to\infty}(c_nd_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{5}{n}(-\sqrt{n})=\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{5}{\sqrt{n}}\right)=0.$$

Для бесконечно малых последовательностей $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = \frac{1}{n^2}$, $c_n = \frac{3}{n}$ вычисляются следующие пределы:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}:\frac{1}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty} n = +\infty;$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}:\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0;$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{c_n}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{n}:\frac{1}{n}\right) = 3;$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{c_n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}:\frac{3}{n}\right) = \frac{1}{3};$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{c_n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}:\frac{3}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{3n};$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{c_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{n}:\frac{1}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty}3n = +\infty.$$

Пример 16. Найти предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n-\sqrt{n+1}+\sqrt{n}+n^2\ln n\right)$.

Выражение под знаком логарифма запишем как $n - (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) + n^2 \ln n$.

Выражение в скобках $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ имеет своим пределом 0, т.к. $\frac{1}{\infty} = 0$.

Но тогда $+\infty - 0 + \infty^2\cdot(+\infty) = +\infty$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Исследовать на ограниченность, монотонность и сходимость.

1. $a_n = \sqrt{n-2} - \sqrt{n+2}.$
2. $a_n = n(\sqrt{n^4+n} - \sqrt{n^4-n}).$
3. $a_n = \sqrt[3]{n^3+2} - \sqrt{n^2-2}.$
4. $a_n = \sqrt{\dfrac{n^4+n^3}{n^3+1}} - \sqrt{n^2-1}.$
5. $a_1 = 2,\ a_{n+1} = \dfrac{a_n^2 - 2}{2}.$
6. $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \dfrac{3}{4}a_n + \dfrac{1}{a_n}.$
7. $a_n = (1+m)^{\sin(\pi n/2)}.$
8. $a_n = n^{\cos \pi n}.$
9. $a_n = \dfrac{n-(-1)^n n}{2n+1}.$
10. $a_n = 2^{\cos(\pi n/4)}.$
11. $a_n = n^2 \sin \dfrac{\pi n}{4}.$
12. $a_n = \dfrac{2^n}{n}.$
13. $a_n = \sqrt{n^2+2n} - n.$
14. $a_n = 2^n - 10n.$
15. $a_n = \dfrac{(3n+1)^2}{3^n}.$
16. $a_n = \dfrac{n^3}{2^n}.$
17. $a_n = (n = 1)^{\frac{1}{n}}.$
18. $a_n = 2^{n+1} - 3^{n-1}.$
19. $a_1 = 1,\ a_2 = 1,\ a_{n+2} = \log_{\frac{1}{2}}(2n^2 - 18n + 29).$

20. $a_1 = 1, a_2 = 1, a_{n+2} = a_{n+1} + \dfrac{a_n}{2^n}$.

21. $a_1 = 2, a_2 = 3, a_{n+2} = \dfrac{a_{n+1} + a_n}{2}$.

22. $a_n = \dfrac{3^n}{n^2}$.

23. $a_1 = 3, a_{n+1} = \dfrac{a_n^2 - 2}{2}$.

24. $a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + \dfrac{1}{n+1}$.

25. $a_1 = 1, a_2 = 1, a_{n+2} = a_{n+1} + 6a_n$.

26. $a_1 = -4, a_2 = 3, a_{n+2} = a_{n+1} + \dfrac{3}{4}a_n$.

Найти следующие пределы

27. $\lim\limits_{n \to \infty}\left(\dfrac{n+2}{n^2+n+3}\sin\dfrac{1}{n}\right)$.

28. $\lim\limits_{n \to \infty}\left((-1)^{n(n+1)/2}\dfrac{n+2}{n^2+1}\right)$.

29. $\lim\limits_{n \to \infty}\left(\sin(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})n^{1/4}\right)$.

30. $\lim\limits_{n \to \infty}\left((\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1})\cos n\right)$.

31. Предел последовательности равен A, причём $A > 0$. Доказать, что найдётся номер, начиная с которого, все члены последовательности больше нуля.

32. Может ли предел последовательности равняться нулю, если каждый её член отрицателен?

33. Как сформулировать, что число A не является пределом последовательности $\{a_n\}$?

34. Верно ли, что всякая сходящаяся последовательность является ограниченной?

35. Как правильно сформулировать, что последовательность не имеет предела?

36. Последовательность $\{a_n\}$ такова, что $a_1 = A$, $a_{n+1} = \dfrac{1}{3}\left(2a_n + \dfrac{A}{a_n^2}\right)$.

Доказать, что предел этой последовательности равен $\sqrt[3]{A}$, и вычислить $\sqrt[3]{4}$ с точностью до 0,001.

37. Доказать, что если отбросить, добавить или заменить конечное число членов сходящейся последовательности, то получится сходящаяся к тому же самому пределу последовательность.

38. Доказать, что если в сходящейся последовательности сделать любую перестановку её членов, то получится сходящаяся к тому же пределу последовательность.

39. Предел последовательности $\{a_n\}$ равен A. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=|A|$.

40. Последовательность $\{|a_n|\}$ сходится. Сходится ли последовательность $\{a_n\}$?

41. Доказать, что во всякой сходящейся последовательности существуют максимальный и минимальный члены этой последовательности.

42. Известно, что $\lim\limits_{n\to\infty}a_n = A$. Доказать, что $\lim\limits_{k\to\infty}a_{2k} = A$, а также $\lim\limits_{k\to\infty}a_{2k+1} = A$.

43. Известно, что $\lim\limits_{k\to\infty}a_{2k}=A$ и $\lim\limits_{k\to\infty}a_{2k+1}=A$. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$.

44. В некоторой окрестности точки A находится бесконечно много членов последовательности $\{a_n\}$. Следует ли отсюда, что число A является пределом этой последовательности?

45. В некоторой окрестности точки A находится бесконечно много членов последовательности $\{a_n\}$. Следует ли отсюда, что некоторое число $B \neq A$ не является пределом этой последовательности?

46. Следует ли, что пределом последовательности является число A, если в любой окрестности точки A находится бесконечно много членов этой последовательности?

47. Следует ли, что некоторое число $B \neq A$ не является пределом этой последовательности, если в любой окрестности точки A находится бесконечно много членов этой последовательности?

48. Следует ли, что последовательность ограничена, если в любой окрестности точки A находится бесконечно много членов этой последовательности?

49. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n b_n)=0$. Следует ли отсюда, что хотя бы одна из последовательностей $\{a_n\}$ или $\{b_n\}$ является сходящейся?

50. Для некоторой последовательности выполняется $a_{n+1} - a_n \to 0$. Верно ли, что $a_n \to 0$? Привести примеры.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Данные методические указания позволят студентам глубже освоить такие темы, как функция, предел функции. Знакомство с теорией и выполнение упражнений на монотонность, ограниченность и сходимость последовательностей способствует развитию навыков более глубокого исследования функций, построения их графиков, выявления особенностей функций на границе и внутри области определения. Многие вопросы теории последовательностей тесно переплетаются с теорией рядов, поэтому для постижения последней изучение последовательностей послужит незаменимым подспорьем.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Задачи по математике. Начала анализа: справ. пособие / В.В. Вавилов, И.И. Мельников, С.Н. Олехник, П.И. Пасиченко. Часть 1. – Москва: Наука, 1990. – 608 с. – Текст: непосредственный.

2. Задачи по математике. Начала анализа: справ. пособие / В.В. Вавилов, И.И. Мельников, С.Н. Олехник, П.И. Пасиченко. Часть 2. – Москва: Наука, 1990. – 608 с. – Текст: непосредственный.

3. Смирнов, В.И. Курс высшей математики / В.И. Смирнов. – Санкт-Петербург: БХВ-Петербург, 2008. – 624 с. – Текст: непосредственный.

4. Пискунов, Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления: учеб. пособие / Н.С. Пискунов. – В 2 х т. Т. 1. – Санкт-Петербург, 1996. – 416 с. – Текст: непосредственный.

5. Пискунов, Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления: учеб. пособие / Н.С. Пискунов. – В 2 х т. Т. 2. – Москва: Наука, 1985. – 560 с. – Текст: непосредственный.

6. Шипачев, В.С. Основы высшей математики: учеб. пособие / В.С. Шипачев; под ред. акад. А. Н. Тихонова. – 2-е изд., стер. – Москва: Высшая школа, 1994. – 479 с. – Текст: непосредственный.

7. Шипачев, В.С. Высшая математика: учебник / В.С. Шипачев. – 4-е изд., стер. – Москва: Высшая школа, 1998. – 479 с. – Текст: непосредственный.

8. Шипачев, В.С. Задачник по высшей математике: учеб. пособие / В.С. Шипачев. – Москва: Высшая школа, 2003. – Текст: непосредственный.

9. Математический энциклопедический словарь / гл. ред. Ю.В. Прохоров. – Москва: Советская энциклопедия, 1988. – Текст: непосредственный.

10. Бронштейн, И.Н. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов / И.Н. Бронштейн, К.А. Семендяев. – Москва: Наука, 1986. – Текст: непосредственный.

СОДЕРЖАНИЕ

Компьютерная верстка Т.В. Телеляева

Темплан ФГБОУВО «ЗГУ» 2022 г. Поз. 15. Подписано в печать 11.02.2022.
Формат 60x84 1/16. Бум. для копир.-мн.ап. Гарнитура *Bookman Old Style.*
Печать плоская. Усл.п.л. 2,0. Уч.-изд.л. 2,0. Тираж 30 экз. Заказ 3.

663310, Норильск, ул. 50 лет Октября, 7. E-mail: RIO@norvuz.ru

Отпечатано с готового оригинал-макета в отделе ЦИТ ФГБОУВО «ЗГУ»