

Документ подписан простой электронной подписью

Информация о владельце:

ФИО: Игнатенко Вячеслав Иванович

Должность: Проректор по учебной работе

Дата подписания: 06.02.2023 08:55:38

Уникальный программный ключ:

a49ae343af5448d45d7e3e1e499659da8109ba78

**Министерство науки и высшего образования РФ**

**ФГБОУВО «Заполярный государственный**

**университет им. Н.М.Федоровского»**

**Кафедра технологических машин и оборудования**

# ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

*Методические указания*

**Норильск 2022**

ББК 22.1я7

Последовательности: метод. указ. / составитель А.Л. Брусков; Министерство науки и высшего образования РФ, Заполярный гос. ун-т им. Н.М. Федоровского. – Норильск: ЗГУ, 2022. – 32 с. – Библиогр.: с. 31. – Текст: непосредственный.

Цель: углубление математических знаний, отработка приёмов логических умозаключений, развитие навыков научного исследования. Предполагается наличие у студентов первоначальных сведений по теме «Последовательности» как школьного, так и вузовского уровня, на котором изучаются начала математического анализа. Для закрепления материала содержатся достаточно широкая серия вопросов и задач, затрагивающих все стороны изложенной темы.

Предназначены для студентов 1–2 курсов естественнонаучного и технического профиля.

## ВВЕДЕНИЕ

Из последовательностей в школьном курсе относительно подробно изучаются арифметическая и геометрическая прогрессии. В некоторых вузовских учебниках о последовательностях излагается ровно столько материала, сколько необходимо для понятия предела функции и производной. Между тем свойства последовательностей могут играть и самостоятельную роль, что позволяет углубить свои познания в естественнонаучных областях. Настоящие методические указания предназначены для студентов-первокурсников, приступающих к изучению дифференциального исчисления, но знакомых с понятием последовательности и имеющих первоначальные навыки вычисления пределов. Соответствующие разделы имеются в программах школьного курса.

Основные свойства последовательностей можно разбить на три направления: монотонные и немонотонные, ограниченные и неограниченные, сходящиеся и несходящиеся. Содержание методических указаний следует по порядку перечисленных свойств. Значительное внимание уделено рекуррентно заданным, а также бесконечно большим последовательностям. Также предложены задачи для самостоятельного решения.

## МОНОТОННОСТЬ

Одна из задач первого направления – исследовать последовательность на монотонность. Это можно сделать, опираясь непосредственно на определение. *Возрастающей последовательностью* называется такая, для которой выполняется:  $a_{n+1} > a_n$ . Если это неравенство выполняется для всех  $n$ , начиная с некоторого  $n_0$ , то последовательность считается возрастающей именно для  $n \geq n_0$ . По определению, убывающая последовательность – такая, для которой  $a_{n+1} < a_n$ , с теми же оговорками.

**Пример 1.** Исследовать на монотонность последовательность  $\{a_n\}$ , если  $a_n = \frac{n+2}{n+1}$ .

Решим неравенство  $a_{n+1} > a_n$ , т.е.  $\frac{(n+1)+2}{(n+1)+1} > \frac{n+2}{n+1}$ .

Упростим:  $\frac{n+3}{n+2} > \frac{n+2}{n+1}$ .

Умножим обе части на положительное  $(n+2)(n+1)$ . Получим:  $(n+3)(n+1) > (n+2)^2$ , или  $n^2 + 4n + 3 > n^2 + 4n + 4$ , и, после сокращений,  $3 > 4$ , что неверно ни при каких значениях переменной  $n$ . А значит, при всех значениях  $n$  выполняется обратное неравенство:  $a_{n+1} < a_n$ , т.е. последовательность является убывающей.

К такому выводу можно прийти, преобразовав общий член последовательности, приведя его к такому виду:

$$a_n = \frac{1}{n+1} + 1.$$

Очевидно, что последовательность  $\{n+1\}$  возрастающая, а  $\left\{\frac{1}{n+1}\right\}$  – убывающая, и если к каждому члену убывающей последовательности прибавить единицу, то она останется убывающей.

Вообще, если последовательность  $\{a_n\}$  возрастающая (или убывающая) и при всех значениях  $n$  сохраняет знак, то при положительном  $k$  обратная последовательность  $\left\{\frac{k}{a_n}\right\}$  будет убывающей (возрастающей); при отрицатель-

ном  $k$  монотонность не изменится. Если же члены последовательности имеют разные знаки, то это правило неприменимо: при смене знака возникает резкая смена монотонности. Так, для возрастающей последовательности  $-3, -2, -1, 1, 2, \dots$  обе обратные последовательности, как  $-\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, -1, 1, \frac{1}{2}, \dots$ , так и  $\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1, -1, -\frac{1}{2}, \dots$ , не являются монотонными (в первой  $1 > -1$ , во второй  $-1 < 1$ ).

Заметим, что если к каждому члену монотонной последовательности прибавить любое число (одно и то же), то монотонность не изменится.

Очевидно также, что сумма двух возрастающих (или убывающих) последовательностей  $\{a_n\}$  и  $\{b_n\}$ , т.е. последовательность с общим членом  $a_n + b_n$ , является возрастающей (убывающей). То же правило действует и для произведения последовательностей  $\{a_n \cdot b_n\}$  с оговоркой  $a_n > 0$ ,  $b_n > 0$  и для произведения положительной последовательности на постоянный положительный множитель  $\{k \cdot a_n\}$ , при отрицательном множителе монотонность меняется.

Пусть  $\{a_n\}$  и  $\{b_n\}$  – данные последовательности. Рассмотрим их композицию  $\{a(b_n)\}$  – сложную последовательность, последовательность от последовательности. Например, если  $a_n = \frac{3}{n}$ ,  $b_n = \arctg n$ , то композиция  $a(b_n) = \frac{3}{\arctg n}$ .

Другая композиция:  $b(a_n) = \arctg \frac{3}{n}$ . Если обе последовательности  $\{a_n\}$  и  $\{b_n\}$  возрастающие, то понятно, что любая их композиция будет возрастающей. Если же обе последовательности убывающие, то любая их композиция будет возрастающей. Действительно, возрастанию переменной  $n$  соответствует убывание  $b_n$ , что является аргументом для убывающей последовательности  $a_n$ . Следовательно,  $\{a(b_n)\}$  будет возрастающей. Легко доказать, что возрастающая последовательность от убывающей или убывающая от возрастающей будут убывающими. Так, например, последовательность с общим членом  $\arctg \frac{3}{n}$  яв-

ляется убывающей, как возрастающая  $\{\arctg n\}$  от убывающей  $\left\{\frac{3}{n}\right\}$ .

Иногда при исследовании последовательности на монотонность можно использовать производную. Пример:  $a^n = \sqrt[3]{n+2} - \sqrt{n}$ . Заменим  $n$  на  $x$  и найдём производную

$$\text{функции } f(x) = \sqrt[3]{x+2} - \sqrt{x} : \frac{d(f(x))}{dx} = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x+2)^2}} - \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Заметим, что знаменатель первой дроби больше знаменателя второй дроби, т.к. степень  $2/3 > 1/2$  и коэффициент  $3 > 2$ . Так что первая дробь меньше второй, значит, производная отрицательна, и функция убывающая, а значит, и последовательность убывающая.

**Пример 2.** Исследовать на монотонность последовательность с общим членом  $a_n = \frac{n^2 + 2n + 6}{n^2 + 2n + 9}$ .

Представим общий член в виде  $a_n = \frac{n^2 + 2n + 9 - 3}{n^2 + 2n + 9} = 1 - \frac{3}{n^2 + 2n + 9}$ . Знаменатель дроби – возрастающая последовательность как сумма возрастающих плюс константа. Обратная к ней с положительным коэффициентом 3 – убывающая. Знак «минус» превращает её опять в возрастающую. Наконец, слагаемое 1 не меняет монотонности.

*Ответ:* последовательность возрастающая.

**Пример 3.** Исследовать на монотонность последовательность с общим членом  $a_n = \frac{n^3}{n^2 - 8n + 1}$ . Рассмотрим

производную функции  $y = \frac{x^3}{x^2 - 8x + 1}$ :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2(x^2 - 8x + 1) - x^3(2x - 8)}{(x^2 - 8x + 1)^2} = \frac{x^4 - 16x^3 + 3x^2}{(x^2 - 8x + 1)^2}.$$

На интервалах  $(-\infty; 8 - \sqrt{61})$  и  $(8 + \sqrt{61}; +\infty)$  производная неотрицательна, функция возрастает, между этими интервалами функция убывает. Отметим, что  $8 - \sqrt{61} \in (0; 1)$ ,  $8 + \sqrt{61} \in (15; 16)$ . Значит, последовательность с

натуральным аргументом  $n$  убывает на промежутке  $n \in \{1, 2, \dots, 15\}$  и возрастает при  $n \geq 16$ . Заметим, что последовательность начинает возрастать именно при  $n = 16$ , поскольку непосредственный подсчёт показывает, что  $a_{15} > a_{16}$ . Очевидно к тому же, что  $a_{16}$  будет наименьшим членом последовательности.

**Пример 4.** Исследовать на монотонность, если  $a_n = \sqrt{n^2 + 3n} - n$ .

Преобразуем общий член к виду  $a_n = \frac{3n}{\sqrt{n^2 + 3n} - n} = \frac{3}{\sqrt{1 + \frac{3}{n}} + 1}$ .

Последовательность  $\frac{3}{n}$  убывающая, слагаемое 1 на эту монотонность не влияет.  $\sqrt{1 + \frac{3}{n}}$  остаётся убывающей (возрастающая  $\sqrt{n}$  от убывающей  $1 + \frac{3}{n}$  есть убывающая).

Ещё одна единица также не меняет монотонности. Наконец, положительное 3 «делится на убывающую», получается возрастающая последовательность.

**Пример 5.** Исследовать на монотонность, если  $a_n = \frac{3^n - 2^n}{3^{n-1} + 2^{n-1}}$ .

Преобразуем общий член:  $a_n = \frac{3 \cdot 3^{n-1} - 2 \cdot 2^{n-1}}{3^{n-1} + 2^{n-1}} = \frac{(3 \cdot 3^{n-1} - 3 \cdot 2^{n-1}) - 5 \cdot 2^{n-1}}{3^{n-1} + 2^{n-1}} = 3 - \frac{5 \cdot 2^{n-1}}{3^{n-1} + 2^{n-1}} = 3 - \frac{5}{\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} + 1}$ .

Последовательность  $\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$  возрастающая, как степень с основанием  $3/2 > 1$ . Слагаемое 1 не меняет монотонности. Обратная последовательность  $\frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} + 1}$  с положительным множителем 5 есть убывающая. Знак «минус»

превращает её в возрастающую, слагаемое 3 не меняет монотонности.

*Ответ:* возрастающая.

**Пример 6.** Исследовать на монотонность, если

$$a_n = \frac{70^n}{n^3}.$$

Рассмотрим частное  $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{70^{n+1}}{(n+1)^3} \div \frac{70^n}{n^3} = \frac{70n^3}{(n+1)^3}.$

Числитель полученной дроби будет больше знаменателя при  $70n^3 > (n+1)^3$ , что равносильно  $\sqrt[3]{70} \cdot n > n+1$  или  $n > \frac{1}{\sqrt[3]{70}-1}.$

Поскольку  $\sqrt[3]{70}-1 \in (3;4)$ , непосредственным подсчётом устанавливаем, что  $a_4 > a_3$ , поэтому последовательность будет возрастающей, начиная с  $a_3$ . Заметим при этом, что  $a_3$  будет наименьшим членом последовательности.



## ОГРАНИЧЕННОСТЬ

Если существует число  $t$  такое, что все члены последовательности удовлетворяют неравенству  $a_n \geq t$ , то последовательность называется *ограниченной снизу*. В последнем примере как раз выполняется  $a_n \geq a_3$ . Последовательность ограничена снизу. Если существует число  $M$  такое, что при всех  $n$  выполняется  $a_n \leq M$ , последовательность называется *ограниченной сверху*, а при наличии двух чисел  $t$  и  $M$  таких, что  $t \leq a_n \leq M$ , она называется *просто ограниченной*. Однако часто в случае односторонней ограниченности говорят «ограниченная», а «сверху» или «снизу» подразумевают.

Неограниченность, например, сверху, означает, что для любого числа  $M$  **найдутся** (т.е. необязательно все) члены последовательности  $a_k$ , для которых будет  $a_k > M$ . Аналогично для неограниченности снизу.

**Пример 7.** Исследовать на ограниченность последовательность с общим членом  $a_n = \frac{n+2}{2n-13}$ .

Решим неравенство  $a_n > M$ , где  $M$  – достаточно большое, вернее, сколь угодно большое число. Решение вида  $n > n_0$  будет говорить о неограниченности сверху, а решение вида  $n < n_0$  – о том, что при всех  $n \geq n_0$  выполняется неравенство  $a_n \leq M$ . Среди членов с номерами от 1 до  $n_0$  должен быть наибольший, скажем,  $n_k$ . Тогда для всех членов последовательности будет выполняться хотя бы одно из неравенств:  $a_n \leq M$ ,  $a_n \leq a_k$ , что будет говорить об ограниченности сверху. Аналогичные результаты можно получить, решая неравенство  $a_n < M$ , что и сделаем.

$\frac{n+2}{2n-13} < M$ . Видно, что при  $n = 1, 2, \dots, 6$  члены последовательности отрицательны, и неравенство непременно выполняется (напомним, что  $M$  – достаточно большое положительное число). Для  $n > 6$  имеем равносильное неравенство  $n+2 < M(2n-13)$ , откуда  $n > \frac{13M+2}{2M-1}$ . Если в ка-

честве  $n_0$  взять целую часть последней дроби, то при всех  $n > n_0$  выполняется  $a_n < M$ . Среди членов с номерами от 1 до  $n_0$  (включая ранее упомянутые отрицательные) есть

наибольший, скажем,  $a_k$ . Поэтому для этих членов будет выполняться неравенство  $a_n \leq a_k$ . Из всего этого следует, что последовательность ограничена сверху.

То, что эта последовательность ограничена и снизу, видно по числу отрицательных членов: 6. Среди них найдётся наименьший,  $a_1 = -3/11$ , так что для всех членов имеет место неравенство  $a_n \geq -3/11$ .

Ограниченность последовательности  $\left\{ \frac{n+2}{2n-13} \right\}$  можно

увидеть, преобразовав общий член. Ограниченность снизу просматривается и без преобразований: по конечному числу отрицательных членов. Для положительных членов

представим общий член в виде  $a_n = \frac{1}{2} + \frac{8,5}{2n-13}$ , из чего

видно, что последовательность убывающая. Значит, первый же положительный член является наибольшим, и все члены последовательности меньше его, что и требовалось обнаружить.

**Пример 8.** Исследовать на ограниченность, если  $a_n = \sqrt[3]{8n-n^3} + \sqrt[3]{8n+n^3}$ .

Преобразуем общий член:  $a_n = \sqrt[3]{n^3+8n} - \sqrt[3]{n^3-8n}$ .

При натуральных  $n$  первое слагаемое по модулю больше второго, поэтому  $a_n > 0$ , и, значит, последовательность ограничена снизу.

Прежде чем говорить об ограниченности сверху, рассмотрим несколько утверждений:

1. Если последовательности  $\{a_n\}$  и  $\{b_n\}$  ограничены снизу, то их сумма ограничена снизу. Для доказательства почленно сложим два неравенства:  $a_n \geq m_1$ ,  $b_n \geq m_2$ , получим  $a_n + b_n \geq m_1 + m_2$ . Аналогично в случае ограниченности сверху, а также для любого конечного количества последовательностей.

2. Если последовательности  $\{a_n\}$  и  $\{b_n\}$  с положительными членами ограничены снизу, то их произведение ограничено снизу. Для доказательства достаточно почленно перемножить два соответствующих неравенства. Аналогично для ограниченности сверху.

3. Если последовательность  $\{a_n\}$  с положительными членами ограничена снизу, то обратная последовательность  $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$  ограничена сверху, и наоборот. Из неравенства  $a_n \geq m$  следует  $\frac{1}{a_n} \leq \frac{1}{m}$ , что и подтверждает сказанное.

Итак,  $a_n = \sqrt[3]{n^3 + 8n} - \sqrt[3]{n^3 - 8n}$ . Умножим и разделим на неполный квадрат суммы:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{16n}{\left(\sqrt[3]{n^3 + 8n}\right)^2 + \sqrt[3]{n^3 + 8n} \cdot \sqrt[3]{n^3 - 8n} + \left(\sqrt[3]{n^3 - 8n}\right)} = \\ &= \frac{16}{n \cdot \left( \left(\sqrt[3]{1 + \frac{8}{n^2}}\right)^2 + \sqrt[3]{1 - \frac{64}{n^4}} + \left(\sqrt[3]{1 - \frac{8}{n^2}}\right)^2 \right)}. \end{aligned}$$

Последовательность

$$\left\{ \left(\sqrt[3]{1 + \frac{8}{n^2}}\right)^2 + \sqrt[3]{1 - \frac{64}{n^4}} + \left(\sqrt[3]{1 - \frac{8}{n^2}}\right)^2 \right\}.$$

ограничена снизу как сумма ограниченных снизу последовательностей. Заметим к тому же, что она не имеет отрицательных членов. Последовательность  $\{n\}$  также ограничена снизу ( $n \geq 1$ ). Произведение положительных ограниченных снизу последовательностей является ограниченной снизу последовательностью. Значит, обратная к ней последовательность вместе с положительным множителем 16 будет последовательностью, ограниченной сверху.

**Пример 9.** Исследовать на ограниченность, если  $a_1 = 1$ ,  $a_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{a_n}$ .

Поскольку  $a_n > 0$ , что очевидно, то последовательность ограничена снизу.

Возьмём число 2 (впрочем, можно взять любое другое достаточно большое число) и рассмотрим неравенство  $a_{n+1} > 2$ ,

т.е.  $\frac{2}{3}a_n + \frac{1}{a_n} > 2$ , которое равносильно следующему:  $2a_n^2 - 6a_n + 3 > 0$ . Решив его относительно  $a_n$ , получим:

$$a_n < \frac{3 - \sqrt{3}}{2} \approx 0,63$$

или

$$a_n > \frac{3 + \sqrt{3}}{2} \approx 2,37.$$

Это значит, что какой-то член последовательности окажется больше 2, если предыдущий член удовлетворяет одному из двух последних неравенств. Но такое невозможно, поскольку  $a_1 = 1$  не удовлетворяет ни одному из этих неравенств. *Вывод:* всякое  $a_n < 2$ , т.е. последовательность ограничена сверху.

## СХОДИМОСТЬ

Известное определение предела часто используется в примерах, где требуется доказать, что некоторое число является пределом данной последовательности. Число  $A$  называется *пределом последовательности*  $\{a_n\}$ , если для любого сколь угодно малого  $\varepsilon > 0$  найдётся такое  $n_0$ , что при всех  $n > n_0$  выполняется неравенство  $|a_n - A| < \varepsilon$ .

**Пример 10.** Доказать, что число 2 является пределом последовательности с общим членом  $a_n = \frac{2n - 3}{n + 4}$ .

Пусть  $\varepsilon > 0$  – сколь угодно малое число. Составим неравенство  $\left| \frac{2n - 3}{n + 4} - 2 \right| < \varepsilon$  и решим его относительно переменной  $n$ . Сначала упростим. Вычтя под знаком модуля 2, получим  $\left| \frac{-11}{n + 4} \right| < \varepsilon$ . Поскольку  $n$  натуральное, то

$\left| \frac{-11}{n + 4} \right| = \frac{11}{n + 4}$ . Тогда  $\frac{11}{n + 4} < \varepsilon$  или  $11 < \varepsilon(n + 4)$ , откуда  $n > \frac{11 - 4\varepsilon}{\varepsilon}$ . Это значит, что существует такое натуральное

$n_0$  (а именно  $\left\lceil \frac{11 - 4\varepsilon}{\varepsilon} \right\rceil + 1$ , начиная с которого все члены последовательности оказываются в  $\varepsilon$ -интервале числа 2, т.е.  $a_n \in (2 - \varepsilon; 2 + \varepsilon)$ , что и означает, что число 2 – предел данной последовательности.

Можно ошибочно подумать, что точно такой же результат получится, если предположить, что пределом той же последовательности является, скажем, число 1. Попробуем «доказать» такую версию. Составим и решим известное неравенство:  $\left| \frac{2n - 3}{n + 4} - 1 \right| < \varepsilon$ ,  $\left| \frac{n - 7}{n + 4} \right| < \varepsilon$ . При достаточно больших значениях  $n$ , а вообще говоря, при  $n > 7$   $\left| \frac{n - 7}{n + 4} \right| = \frac{n - 7}{n + 4}$ , так что неравенство равносильно  $\frac{n - 7}{n + 4} < \varepsilon$ , или  $n - 7 < \varepsilon(n + 4)$ , откуда  $\varepsilon n - n > -7 - 4\varepsilon$ ,  $n(\varepsilon - 1) > -7 - 4\varepsilon$ ,

и, казалось бы, получается  $n > \frac{-7-4\varepsilon}{\varepsilon-1}$ , или  $n > \frac{-7+4\varepsilon}{1-\varepsilon}$ . Но

это ошибка. Ведь число  $\varepsilon$  какое угодно, но *малое*, меньшее не только единицы, но и любого фиксированного, близкого к нулю числа. Так что величина  $(\varepsilon - 1)$ , на которую делим обе части неравенства, отрицательна, и при делении требуется знак «>» поменять на «<». И тогда получится верное решение  $n < \frac{-7-4\varepsilon}{\varepsilon-1}$ , или  $n < \frac{7+4\varepsilon}{1-\varepsilon}$ . А это означает, что

исходное неравенство  $\left| \frac{2n-3}{n+4} - 1 \right| < \varepsilon$  выполняется не для

всех  $n$ , начиная с какого-то  $n_0$ , а до какого-то значения  $n$ . То есть в  $\varepsilon$ -интервале  $(1 - \varepsilon; 1 + \varepsilon)$  оказывается конечное число членов последовательности, а значит, число 1 не является пределом данной последовательности. Заметим, что в других случаях при правильном решении в ответе типа  $n < \frac{7+4\varepsilon}{1-\varepsilon}$  может вообще не оказаться натуральных чисел.

Таким образом, чтобы воспользоваться определением для доказательства того, что число  $A$  является пределом последовательности, прежде надо заполучить это число или, по крайней мере, держать его в подозрении.

**Пример 11.** Найти предел последовательности с общим членом  $a_n = \frac{3n+1}{n+2}$ .

Составим неравенство:

$$\left| \frac{3n+1}{n+2} - A \right| < \varepsilon,$$

где  $A$  – искомый предел;  $\varepsilon$  – сколь угодно малое положительное число.

Будем искать такое  $A$ , при котором это неравенство имеет решение в виде бесконечного интервала  $n > ?$  – именно *больше* чего-то. Среди этого «чего-то» обязательно найдётся наименьшее целое (вернее натуральное) число, которое обозначим как  $n_0$ .

Учитывая, что при натуральных  $n$  знаменатель  $n + 2 > 0$ , заменим наше неравенство равносильным:  $\left| 3n + 1 - An - 2A \right| < n\varepsilon + 2\varepsilon$ , что в свою очередь равносильно системе:

$$\begin{cases} 2A - 1 - 2\varepsilon < n(3 - A + \varepsilon); \\ n(3 - A - \varepsilon) < 2A - 1 + 2\varepsilon. \end{cases}$$

Решение этой системы зависит от знаков выражений  $3 - A + \varepsilon$  и  $3 - A - \varepsilon$ . Понятно, что первое выражение больше второго.

Заметим также, что  $2A - 1 - 2\varepsilon < 2A - 1 + 2\varepsilon$ .

Рассмотрим 4 случая:

1.  $3 - A + \varepsilon > 0$ ,  $3 - A - \varepsilon > 0$ . Тогда решением системы будет интервал  $\left(\frac{2A - 1 - 2\varepsilon}{3 - A + \varepsilon}; \frac{2A - 1 + 2\varepsilon}{3 - A - \varepsilon}\right)$ , который имеет право на существование, поскольку левая дробь меньше правой. Но это решение не устраивает: нужен бесконечный интервал.

2.  $3 - A + \varepsilon > 0$ ,  $3 - A - \varepsilon < 0$ . В этом случае решением должно быть пересечение двух интервалов:  $\left(-\infty; \frac{2A - 1 - 2\varepsilon}{3 - A + \varepsilon}\right)$  и  $\left(\frac{2A - 1 + 2\varepsilon}{3 - A - \varepsilon}; +\infty\right)$ . Но эти интервалы не пересекаются, так как правый конец левого меньше, чем левый конец правого. Значит, решения нет вообще.

3.  $3 - A + \varepsilon < 0$ ,  $3 - A - \varepsilon > 0$ . Здесь решением будет пересечение двух интервалов:  $\left(-\infty; \frac{2A - 1 - 2\varepsilon}{3 - A + \varepsilon}\right)$  и  $\left(-\infty; \frac{2A - 1 + 2\varepsilon}{3 - A - \varepsilon}\right)$ , а именно первый из них. Это опять не устраивает: т.к. нужен интервал не от минус бесконечности до ..., а от ... до плюс бесконечности.

4.  $3 - A + \varepsilon > 0$ ,  $3 - A - \varepsilon < 0$ . Наконец, получаем то, что ожидали. Решением будет пересечение двух интервалов:  $\left(\frac{2A - 1 - 2\varepsilon}{3 - A + \varepsilon}; +\infty\right)$  и  $\left(\frac{2A - 1 + 2\varepsilon}{3 - A - \varepsilon}; +\infty\right)$ , а именно второй из них, в котором обязательно содержатся натуральные числа, а среди них и наименьшее  $n_0$ . Система  $3 - A + \varepsilon > 0$ ,  $3 - A - \varepsilon < 0$  означает, что число 3 находится в середине интервала  $(A - \varepsilon; A + \varepsilon)$ , а результат данного решения говорит о том, что, начиная с некоторого  $n_0$ , все члены последовательности  $\left\{\frac{3n + 1}{n + 2}\right\}$  находятся в том же интервале, и

так будет при любом сколь угодно малом положительном  $\varepsilon$ . Значит, число 3 является пределом последовательности.

Рассмотрим пример вычисления предела за рамками определения.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n}$ . Начнём с того, что при  $n > 1$  выполняется неравенство  $\sqrt[n]{n} > 1$ . Обозначим  $\sqrt[n]{n} - 1 = a_n$ , т.е.  $\sqrt[n]{n} = 1 + a_n$ . Возведём обе части этого равенства в  $n$ -ю степень:

$$n = 1 + n \cdot a_n + \frac{n(n-1)}{2!} a_n^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} a_n^3 + \dots$$

Так как сумма положительных слагаемых больше любого отдельного слагаемого, то  $n > \frac{n(n-1)}{2!} a_n^2$ , откуда

$a_n < \sqrt{\frac{2}{n-1}}$ . Но поскольку  $\frac{2}{n-1} \rightarrow 0$ , то и  $\sqrt{\frac{2}{n-1}} \rightarrow 0$ , т.е.  $a_n \rightarrow 0$ , а значит,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ .

Рассмотрим предел функции:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\ln x^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{\ln x}{x}} = e \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x}.$$

Далее воспользуемся правилом Лопиталя:

$$e \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = e^0 = 1.$$

При исследовании на сходимость большую роль может сыграть теорема Вейерштрасса, которая соединяет монотонность, ограниченность и сходимость в одно целое: если последовательность монотонна и ограничена, то она имеет предел. При этом если последовательность возрастающая, то она должна быть ограниченной сверху, а если убывает, то – снизу. Пределом в обоих случаях будет точная граница.

Ещё одна теорема (совершенно очевидная):  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1}$ , что означает, что если последовательность  $\{a_n\}$  имеет предел (в том числе и бесконечный), то последовательность  $\{a_{n+1}\}$  имеет тот же предел. Вместо единицы может быть любое натуральное число  $k$ , так что  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+k}$ .



**Пример 12.** Найти предел последовательности с общим членом  $a_n = \frac{n^k}{b^n}$ , если этот предел существует;  $k, b > 0$ .

Рассмотрим отношение:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^k b^n}{b^{n+1} n^k} = \frac{(n+1)^k}{b n^k}.$$

Решим неравенство  $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$  относительно  $n$ , т.е. поставим вопрос: при каких значениях  $n$  последовательность возрастает:

$$\frac{(n+1)^k}{b n^k} > 1, \quad (n+1)^k > b n^k, \quad n+1 > n \cdot \sqrt[k]{b}.$$

Дальше рассмотрим два случая:  $b < 1$  и  $b > 1$  (случай  $b = 1$  очевиден:  $a_n \rightarrow +\infty$ ).

При  $b < 1$   $n > \frac{-1}{1 - \sqrt[k]{b}}$ , т.е.  $n$  – любое натуральное число. При всех натуральных  $n$  последовательность возрастает. Заменяя  $b$  на  $\frac{1}{c}$ , где  $c > 1$ , получим:  $a_n = n^k c^n \rightarrow +\infty$ , последовательность не является ограниченной и не имеет предела.

Если  $b > 1$ , то  $n < \frac{1}{\sqrt[k]{b} - 1}$ , т.е. последовательность возрастает, начиная с  $n = 1$  до целой части величины  $\frac{1}{\sqrt[k]{b} - 1}$ ,

при всех  $n$  от  $\left\lfloor \frac{1}{\sqrt[k]{b} - 1} \right\rfloor$  до  $+\infty$  последовательность убывает. Её

ограниченность снизу очевидна:  $a_n < 0$ . По теореме Вейерштрасса есть предел. Обозначим его  $A$ . Таким образом,  $a_n \rightarrow A$ , а также  $a_{n+1} \rightarrow A$ . Заметим, что убывающая положительная последовательность может иметь только конечный предел.

Отношение  $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^k}{bn^k}$  преобразуем к виду

$a_{n+1} = \frac{(n+1)^k}{bn^k} \cdot a_n$  и устремим  $n$  к  $+\infty$ : поскольку  $\frac{(n+1)^k}{bn^k} \rightarrow \frac{1}{b}$ , то  $A = \frac{1}{b} \cdot A$ . Это равенство возможно лишь при  $A = 0$ .

*Ответ:* предел существует при  $b > 1$ , и он равен нулю.

**Пример 13.** Исследовать на сходимость последовательность, которая задана рекуррентно:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left( x_n + \frac{a}{x_n} \right), \quad x_1 = a, \quad a > 0.$$

Рассмотрим неравенство  $x_{n+1} > x_n$ ,

то есть

$$\frac{1}{2} \left( x_n + \frac{a}{x_n} \right) > x_n,$$

которое равносильно  $a > x_n^2$  или  $x_n < \sqrt{a}$ . Это значит, что последовательность будет возрастать, начиная с  $x_n$ , если  $x_n < \sqrt{a}$ . Следовательно, если  $x_n > \sqrt{a}$ , то она будет убывать. Посмотрим, возможно ли, чтобы  $x_n$  (а это всё равно, что  $x_{n+1}$ ) было больше  $\sqrt{a}$ . Решим неравенство  $x_{n+1} > \sqrt{a}$ :

$$\frac{1}{2} \left( x_n + \frac{a}{x_n} \right) > \sqrt{a}; \quad x_n^2 + a > 2x_n \sqrt{a}; \quad (x_n - \sqrt{a})^2 > 0.$$

Последнее неравенство выполняется всегда, за исключением случая, когда  $x_n = \sqrt{a}$ , тогда неравенство обращается в равенство, но тогда и все следующие члены будут равны  $\sqrt{a}$ . Значит, если последнее неравенство выполняется всегда, то последовательность является убывающей. А если задать  $x_1 < \sqrt{a}$ ? Тогда

$$x_2 = \frac{1}{2} \left( x_1 + \frac{a}{x_1} \right) > \sqrt{a},$$

в чём легко убедиться:  $x_1^2 + a > 2x_1 \sqrt{a}$ ,  $(x_1 - \sqrt{a})^2 > 0$ , что очевидно. Итак, если даже первый член последовательности

будет меньше  $\sqrt{a}$ , то второй будет неизбежно больше, и последовательность будет убывать, начиная со второго члена, оставаясь больше  $\sqrt{a}$  (ограничена снизу). Вывод: она имеет предел. Этот предел обозначим  $A$ . Поскольку  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1}$ , то  $\frac{1}{2} \left( A + \frac{a}{A} \right) = A$ . Решив это уравнение относительно  $A$ , получим:  $A = \sqrt{a}$ .

**Пример 14.** Исследовать на сходимость последовательность, если  $a_{n+1} = \frac{a_n + 1}{2}$ ,  $a_1 = 3$ .

Рассмотрим неравенство  $a_{n+1} < a_n$ :  $\frac{a_n + 1}{2} < a_n$ , что равносильно  $a_n > 1$ . Это значит, что если какой-то  $n$ -й член последовательности больше единицы, то следующий  $(n + 1)$ -й будет меньше чем  $n$ -й; налицо признак убывания. Но при этом  $(n + 1)$ -й может оказаться меньше единицы, и тогда характер монотонности изменится:  $(n + 2)$ -й член обязан быть уже больше  $(n + 1)$ -го. Проверим, может ли какой-то член последовательности быть меньше единицы:  $\frac{a_n + 1}{2} < 1$ , что равносильно  $a_n < 1$ . Значит, член последовательности может оказаться меньше единицы, если предыдущий член меньше единицы. В данном случае, поскольку  $a_1 = 3 > 1$ , все члены последовательности будут больше единицы. Это значит, что последовательность, во-первых, убывающая, во-вторых, ограничена снизу. Согласно теореме Вейерштрасса, она имеет предел, который обозначим буквой  $A$ . По свойствам сходящихся последовательностей  $A = \frac{A + 1}{2}$ , откуда  $A = 1$ .

**Пример 15.** Исследовать на сходимость последовательность

$$x_1 = \frac{a}{2}; x_2 = \frac{a}{2} - \frac{x_1^2}{2}; x_3 = \frac{a}{2} - \frac{x_2^2}{2}; x_n = \frac{a}{2} - \frac{x_{n-1}^2}{2}; a \in (0; 1).$$

$$\text{Рассмотрим разность: } x_2 - x_1 = \frac{a}{2} - \frac{x_1^2}{2} - \frac{a}{2} = -\frac{x_1^2}{2} < 0.$$

Кроме того,  $x_2 = \frac{a}{2} - \frac{x_1^2}{2} = \frac{a}{2} - \frac{a^2}{8} = \frac{a(4-a)}{8} > 0$ .

Значит,  $0 < x_2 < x_1$ .

Далее  $x_3 - x_2 = \frac{a}{2} - \frac{x_2^2}{2} - \frac{a}{2} + \frac{x_1^2}{2} = \frac{x_1^2 - x_2^2}{2} > 0$ .

Значит,  $x_3 > x_2$ .

Далее  $x_3 - x_1 = \frac{a}{2} - \frac{x_2^2}{2} - \frac{a}{2} = -\frac{x_2^2}{2} < 0$ . Значит,  $x_3 < x_1$ , и,

следовательно,  $x_2 < x_3 < x_1$ .

Продолжим:  $x_4 - x_3 = \frac{x_2^2 - x_3^2}{2} < 0$ , значит,  $x_3 > x_4$ ;  $x_4 - x_2 = \frac{x_1^2 - x_3^2}{2} > 0$ , значит,  $x_4 > x_2$ . Следовательно,  $x_2 < x_4 < x_3$ .

Точно так же получим  $x_4 < x_5 < x_3$ .

Убедимся, что  $x_{2n} < x_{2n+1} < x_{2n-1}$ , а  $x_{2n} < x_{2n+2} < x_{2n+1}$ , то есть, что последовательность  $x_1, x_3, x_5, \dots, x_{2n-1}, \dots$  убывающая, а  $x_2, x_4, x_6, \dots, x_{2n}, \dots$  — возрастающая. Для этого достаточно, предположив справедливость этого утверждения для всех натуральных чисел, меньше либо равных некоторого  $n$ , доказать его справедливость и при  $n + 1$ . Иными словами, надо доказать, что из двух цепочек неравенств  $x_{2n} < x_{2n+1} < x_{2n-1}$  и  $x_{2n} < x_{2n+2} < x_{2n+1}$  следуют две другие цепочки:  $x_{2n+2} < x_{2n+3} < x_{2n+1}$  и  $x_{2n+2} < x_{2n+4} < x_{2n+3}$ . Тем самым будет реализован метод математической индукции.

Имеем:  $x_{2n+2} - x_{2n+1} = \frac{x_{2n}^2 - x_{2n+1}^2}{2} < 0$ , значит,  $x_{2n+2} < x_{2n+1}$ ;

$x_{2n+3} - x_{2n+2} = \frac{x_{2n+1}^2 - x_{2n+2}^2}{2} < 0$ , значит,  $x_{2n+3} > x_{2n+2}$ ;

$x_{2n+3} - x_{2n+1} = \frac{x_{2n}^2 - x_{2n+2}^2}{2} < 0$ , значит,  $x_{2n+3} < x_{2n+1}$ .

Следовательно,  $x_{2n+2} < x_{2n+3} < x_{2n+1}$ ;

$x_{2n+2} - x_{2n+3} = \frac{x_{2n+2}^2 - x_{2n+1}^2}{2} < 0$ , значит,  $x_{2n+2} < x_{2n+3}$ ;

$x_{2n+4} - x_{2n+3} = \frac{x_{2n+2}^2 - x_{2n+3}^2}{2} < 0$ , значит,  $x_{2n+4} < x_{2n+3}$ ;

$$x_{2n+2} - x_{2n+4} = \frac{x_{2n+3}^2 - x_{2n+1}^2}{2} < 0, \text{ значит, } x_{2n+2} < x_{2n+4}.$$

Следовательно,  $x_{2n+2} < x_{2n+4} < x_{2n+3}$ , что и требовалось доказать.

По теореме Вейерштрасса эти монотонные и ограниченные последовательности имеют пределы. Обозначим их как  $A$  и  $B$ . В равенствах  $x_{2n+1} = \frac{a}{2} - \frac{x_{2n}^2}{2}$  и  $x_{2n} = \frac{a}{2} - \frac{x_{2n-1}^2}{2}$

перейдём к пределу при  $n \rightarrow \infty$ . Получим:  $A = \frac{a}{2} - \frac{B^2}{2}$ ,

$B = \frac{a}{2} - \frac{A^2}{2}$ . Решим эту систему. После вычитания имеем:

$A - B = \frac{A^2 - B^2}{2}$ , или  $(A - B) \left(1 - \frac{A + B}{2}\right) = 0$ . Так как при лю-

бом натуральном  $n$   $x_n \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$ , то  $A + B < 2$ , и скобка

$\left(1 - \frac{A + B}{2}\right) = 0$  не может равняться нулю. Значит,  $A - B = 0$ ,

после чего получаем, что  $A = B = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt{1 + a} - 1$ .

Запись  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$  означает, что каково бы ни было положительное число  $M$ , найдётся такое  $n_0$ , что при всех  $n > n_0$  выполняется неравенство  $x_n > M$ . В этом случае говорят, что последовательность имеет предел, равный плюс бесконечности. На самом деле, согласно определению, предела, как такового, нет, но запись  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$  наряду с  $x_n \rightarrow +\infty$  употребляется. Ещё говорят, что последовательность расходится к плюс бесконечности. Аналогично, когда последовательность расходится к минус бесконечности. Это означает, что каково бы ни было положительное число  $M$ , найдётся такое  $n_0$ , что при всех  $n > n_0$  выполняется неравенство  $x_n < -M$ . В краткой записи:  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$  или  $x_n \rightarrow -\infty$ .

Докажем с помощью определения, что последовательность с общим членом  $x_n = n^2$  расходится к плюс бесконечности. Пусть  $M$  – сколь угодно большое положительное число. Составим неравенство  $n^2 > M$ , которое выполняется при всех  $n > \sqrt{M}$ , т.е. найдётся такое  $n_0$ , а именно

$[\sqrt{M}] + 1$ , для которого при всех  $n > n_0$  выполняется неравенство  $x_n > M$ .

Докажем, что последовательность с общим членом  $x_n = 1 - \sqrt{n}$  расходуется к минус бесконечности. Составим неравенство  $1 - \sqrt{n} < -M$  и решим его относительно  $n$ . Получим:  $n > (1 + M)^2$ . Искомое  $n_0 = [(1 + M)^2] + 1$ .

Следует различать три вида похожих друг на друга последовательностей: расходящиеся к плюс или минус бесконечности, бесконечно большие последовательности и неограниченные. Определения первых уже рассмотрели.

Бесконечно большими последовательностями (или просто расходящимися к бесконечности) называются те, для которых  $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = +\infty$ . Для таких последовательностей приняты записи:  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$  или  $x_n \rightarrow \infty$  (без знака «плюс» или «минус»). Примером бесконечно большой может служить последовательность с общим членом  $x_n = (-1)^n n^2$ :  $-1$ ;  $4$ ;  $-9$ ;  $16$ ;  $-25$ ; ... и т.д. Другое истолкование бесконечно большой последовательности: все члены последовательности, начиная с некоторого  $n_0$ , находятся вне конечного отрезка  $[-M; M]$ , а внутри его может содержаться лишь конечное число членов. Всякая расходящаяся к плюс или минус бесконечности последовательность, очевидно, является одновременно и бесконечно большой, обратное неверно, примером чего может служить только что приведённая последовательность.

Для неограниченной, скажем, сверху последовательности для любого сколь угодно большого  $M$  найдётся такой член последовательности  $x_k$ , который больше  $M$ . Поэтому всякая бесконечно большая или расходящаяся к плюс или минус бесконечности последовательность является одновременно и неограниченной. Вместе с тем существуют неограниченные последовательности, не являющиеся бесконечно большими или расходящимися к плюс или минус бесконечности. Пример: последовательность с общим членом  $x_n = n \cdot \sin \frac{\pi n}{2}$ , члены которой при нечётных  $n$  становятся бесконечно большими по абсолютной величине, а при чётных – равны нулю.

Для бесконечно больших или расходящихся к плюс или минус бесконечности последовательностей характерны соотношения:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} = 0$ . Обратно, если  $a_n$  – бесконечно малая последовательность ( $a_n \rightarrow 0$ ), то при сохранении соответствующего знака  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = \pm\infty$ . В символической записи это выглядит так:  $\frac{1}{\infty} = 0$ ,  $\frac{1}{0} = \infty$ .

### ***О свойствах последовательностей с бесконечными пределами***

Вместо «последовательность с общим членом  $x_n$ » будем писать «последовательность  $\{x_n\}$ ». Очевидны следующие утверждения:

1. Если  $a_n \rightarrow +\infty$ , а последовательность  $\{b_n\}$  либо ограничена, либо ограничена снизу, то  $\{a_n + b_n\} \rightarrow +\infty$ .

2. Если  $a_n \rightarrow -\infty$ , а последовательность  $\{b_n\}$  либо ограничена, либо ограничена сверху, то  $\{a_n + b_n\} \rightarrow -\infty$ .

3. Если  $a_n \rightarrow +\infty$ , а последовательность  $\{b_n\}$  такова, что  $b_n > M > 0$  при любом  $n$ , то  $a_n b_n \rightarrow +\infty$ .

4. Если  $a_n \rightarrow +\infty$ , а последовательность  $\{b_n\}$  такова, что  $0 < b_n < M$  при любом  $n$ , то  $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow +\infty$ .

5. Если  $a_n \rightarrow 0$ , а последовательность  $\{b_n\}$  такова, что  $|b_n| > M > 0$  при любом  $n$ , то  $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow 0$ .

6. Если  $|a_n| < M$ , а последовательность  $\{b_n\}$  такова, что  $|b_n| \rightarrow +\infty$  при любом  $n$ , то  $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow 0$ .

7. Если  $|b_n| \rightarrow 0$ , а последовательность  $\{a_n\}$  такова, что  $|a_n| > M > 0$  при любом  $n$ , то  $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow +\infty$ .

8. Если  $a_n \rightarrow +\infty$ , а последовательность  $\{b_n\}$  такова, что  $b_n \geq a_n$  при любом  $n$ , то  $|b_n| \rightarrow +\infty$ .

Например, если  $a_n = \sqrt{n}$ ,  $b_n = 2\cos(n + 1) + 3$ , то  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = +\infty$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = +\infty$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = 0$ .

Во многих случаях имеют место следующие так называемые неопределённости, когда вопрос о пределе последовательности остаётся открытым и требует исследования – раскрытия неопределённости:

1. Требуется исследование вопроса о пределе последовательности  $\{a_n - b_n\}$ , если  $a_n \rightarrow +\infty$ ,  $b_n \rightarrow +\infty$ , неопределённость вида  $\infty - \infty$ .

2.  $\{a_n b_n\}$ , если  $a_n \rightarrow +\infty$ ,  $b_n \rightarrow 0$ : неопределённость вида  $\infty \cdot 0$ .

3.  $\left\{ \frac{a_n}{b_n} \right\}$ , если  $a_n \rightarrow +\infty$ ,  $b_n \rightarrow +\infty$  неопределённость вида  $\left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\}$ .

4.  $\left\{ \frac{a_n}{b_n} \right\}$ , если  $a_n \rightarrow 0$ ,  $b_n \rightarrow 0$  неопределённость вида  $\left\{ \frac{0}{0} \right\}$ .

5.  $\{a^n b^n\}$ , если  $a_n \rightarrow 0$ ,  $b_n \rightarrow 0$  неопределённость вида  $0^0$ .

6.  $\{a^n b^n\}$ , если  $a_n \rightarrow 1$ ,  $b_n \rightarrow +\infty$  неопределённость вида  $1^\infty$ .

Однако часто указанное исследование довольно простое. Например, если  $a_n = n + 5$ ,  $b_n = n + 1$ ,  $c_n = n$ ,  $d_n = 3n$ ,  $f_n = n^2$ , то следующие пределы легко вычисляются, раскрывая соответствующие неопределённости:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (n + 5 - n - 1) = 4;$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - c_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (n + 5 - n) = 5;$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - c_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (n + 1 - n) = 1;$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (c_n - f_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (n - n^2) = \lim_{n \rightarrow \infty} n(1 - n) = -\infty;$$



$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+5}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{5}{n}}{1 + \frac{1}{n}} = 1;$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_n}{d_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{3n} = \frac{1}{3};$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_n}{f_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0;$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n}{d_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{3n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{3} = +\infty.$$

Если последовательности  $a_n = -n$ ,  $f_n = -n^2$ ,  $d_n = -\sqrt{n}$  бесконечно большие, а последовательности  $b_n = \frac{1}{n}$ ,  $c_n = \frac{5}{n}$  бесконечно малые, то следующие пределы легко вычисляются:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (-n) \left( \frac{1}{n} \right) = -1;$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n c_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( -n \cdot \frac{5}{n} \right) = -5;$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d_n}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\sqrt{n}}{-n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0;$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n d_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (-n)(-\sqrt{n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} n\sqrt{n} = +\infty;$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f_n b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (-n^2) \left( \frac{1}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} (-n) = -\infty;$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (d_n b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (-\sqrt{n}) \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( -\frac{1}{\sqrt{n}} \right) = 0;$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f_n c_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (-n^2) \frac{5}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (-5n) = -\infty;$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (c_n d_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{n} (-\sqrt{n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( -\frac{5}{\sqrt{n}} \right) = 0.$$

Для бесконечно малых последовательностей  $a_n = \frac{1}{n}$ ,

$b_n = \frac{1}{n^2}$ ,  $c_n = \frac{3}{n}$  вычисляются следующие пределы:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n} : \frac{1}{n^2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n = +\infty;$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n^2} : \frac{1}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0;$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_n}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{3}{n} : \frac{1}{n} \right) = 3;$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{c_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n} : \frac{3}{n} \right) = \frac{1}{3};$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{c_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n^2} : \frac{3}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3n};$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{3}{n} : \frac{1}{n^2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} 3n = +\infty.$$

**Пример 16.** Найти предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} (n - \sqrt{n+1} + \sqrt{n} + n^2 \ln n)$ .

Выражение под знаком логарифма запишем как  $n - (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) + n^2 \ln n$ .

Выражение в скобках  $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$  имеет

своим пределом 0, т.к.  $\frac{1}{\infty} = 0$ .

Но тогда  $+\infty - 0 + \infty^2 \cdot (+\infty) = +\infty$ .

## ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Исследовать на ограниченность, монотонность и сходимость.

$$1. a_n = \sqrt{n-2} - \sqrt{n+2}.$$

$$2. a_n = n(\sqrt{n^4 + n} - \sqrt{n^4 - n}).$$

$$3. a_n = \sqrt[3]{n^3 + 2} - \sqrt{n^2 - 2}.$$

$$4. a_n = \sqrt{\frac{n^4 + n^3}{n^3 + 1}} - \sqrt{n^2 - 1}.$$

$$5. a_1 = 2, a_{n+1} = \frac{a_n^2 - 2}{2}.$$

$$6. a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{3}{4}a_n + \frac{1}{a_n}.$$

$$7. a_n = (1 + m)^{\sin(\pi n / 2)}.$$

$$8. a_n = n^{\cos \pi n}.$$

$$9. a_n = \frac{n - (-1)^n n}{2n + 1}.$$

$$10. a_n = 2^{\cos(\pi n / 4)}.$$

$$11. a_n = n^2 \sin \frac{\pi n}{4}.$$

$$12. a_n = \frac{2^n}{n}.$$

$$13. a_n = \sqrt{n^2 + 2n} - n.$$

$$14. a_n = 2^n - 10n.$$

$$15. a_n = \frac{(3n + 1)^2}{3^n}.$$

$$16. a_n = \frac{n^3}{2^n}.$$

$$17. a_n = (n + 1)^{\frac{1}{n}}.$$

$$18. a_n = 2^{n+1} - 3^{n-1}.$$

$$19. a_1 = 1, a_2 = 1, a_{n+2} = \log_{\frac{1}{2}}(2n^2 - 18n + 29).$$

$$20. a_1 = 1, a_2 = 1, a_{n+2} = a_{n+1} + \frac{a_n}{2^n}.$$

$$21. a_1 = 2, a_2 = 3, a_{n+2} = \frac{a_{n+1} + a_n}{2}.$$

$$22. a_n = \frac{3^n}{n^2}.$$

$$23. a_1 = 3, a_{n+1} = \frac{a_n^2 - 2}{2}.$$

$$24. a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + \frac{1}{n+1}.$$

$$25. a_1 = 1, a_2 = 1, a_{n+2} = a_{n+1} + 6a_n.$$

$$26. a_1 = -4, a_2 = 3, a_{n+2} = a_{n+1} + \frac{3}{4}a_n.$$

Найти следующие пределы

$$27. \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n+2}{n^2+n+3} \sin \frac{1}{n} \right).$$

$$28. \lim_{n \rightarrow \infty} \left( (-1)^{n(n+1)/2} \frac{n+2}{n^2+1} \right).$$

$$29. \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sin(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) n^{1/4} \right).$$

$$30. \lim_{n \rightarrow \infty} \left( (\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}) \cos n \right).$$

31. Предел последовательности равен  $A$ , причём  $A > 0$ . Доказать, что найдётся номер, начиная с которого, все члены последовательности больше нуля.

32. Может ли предел последовательности равняться нулю, если каждый её член отрицателен?

33. Как сформулировать, что число  $A$  не является пределом последовательности  $\{a_n\}$ ?

34. Верно ли, что всякая сходящаяся последовательность является ограниченной?

35. Как правильно сформулировать, что последовательность не имеет предела?

36. Последовательность  $\{a_n\}$  такова, что  $a_1 = A$ ,

$$a_{n+1} = \frac{1}{3} \left( 2a_n + \frac{A}{a_n^2} \right).$$

Доказать, что предел этой последовательности равен  $\sqrt[3]{A}$ , и вычислить  $\sqrt[3]{4}$  с точностью до 0,001.

37. Доказать, что если отбросить, добавить или заменить конечное число членов сходящейся последовательности, то получится сходящаяся к тому же самому пределу последовательность.

38. Доказать, что если в сходящейся последовательности сделать любую перестановку её членов, то получится сходящаяся к тому же пределу последовательность.

39. Предел последовательности  $\{a_n\}$  равен  $A$ . Доказать, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |A|$ .

40. Последовательность  $\{|a_n|\}$  сходится. Сходится ли последовательность  $\{a_n\}$ ?

41. Доказать, что во всякой сходящейся последовательности существуют максимальный и минимальный члены этой последовательности.

42. Известно, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ . Доказать, что  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k} = A$ , а также  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k+1} = A$ .

43. Известно, что  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k} = A$  и  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k+1} = A$ . Доказать, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ .

44. В некоторой окрестности точки  $A$  находится бесконечно много членов последовательности  $\{a_n\}$ . Следует ли отсюда, что число  $A$  является пределом этой последовательности?

45. В некоторой окрестности точки  $A$  находится бесконечно много членов последовательности  $\{a_n\}$ . Следует ли отсюда, что некоторое число  $B \neq A$  не является пределом этой последовательности?

46. Следует ли, что пределом последовательности является число  $A$ , если в любой окрестности точки  $A$  находится бесконечно много членов этой последовательности?

47. Следует ли, что некоторое число  $B \neq A$  не является пределом этой последовательности, если в любой окрестности точки  $A$  находится бесконечно много членов этой последовательности?

48. Следует ли, что последовательность ограничена, если в любой окрестности точки  $A$  находится бесконечно много членов этой последовательности?

49. Пусть  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = 0$ . Следует ли отсюда, что хотя бы одна из последовательностей  $\{a_n\}$  или  $\{b_n\}$  является сходящейся?

50. Для некоторой последовательности выполняется  $a_{n+1} - a_n \rightarrow 0$ . Верно ли, что  $a_n \rightarrow 0$ ? Привести примеры.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Данные методические указания позволят студентам глубже освоить такие темы, как функция, предел функции. Знакомство с теорией и выполнение упражнений на монотонность, ограниченность и сходимости последовательностей способствует развитию навыков более глубокого исследования функций, построения их графиков, выявления особенностей функций на границе и внутри области определения. Многие вопросы теории последовательностей тесно переплетаются с теорией рядов, поэтому для постижения последней изучение последовательностей послужит незаменимым подспорьем.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Задачи по математике. Начала анализа: справ. пособие / В.В. Вавилов, И.И. Мельников, С.Н. Олехник, П.И. Пасиченко. Часть 1. – Москва: Наука, 1990. – 608 с. – Текст: непосредственный.
2. Задачи по математике. Начала анализа: справ. пособие / В.В. Вавилов, И.И. Мельников, С.Н. Олехник, П.И. Пасиченко. Часть 2. – Москва: Наука, 1990. – 608 с. – Текст: непосредственный.
3. Смирнов, В.И. Курс высшей математики / В.И. Смирнов. – Санкт-Петербург: БХВ-Петербург, 2008. – 624 с. – Текст: непосредственный.
4. Пискунов, Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления: учеб. пособие / Н.С. Пискунов. – В 2 х т. Т. 1. – Санкт-Петербург, 1996. – 416 с. – Текст: непосредственный.
5. Пискунов, Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления: учеб. пособие / Н.С. Пискунов. – В 2 х т. Т. 2. – Москва: Наука, 1985. – 560 с. – Текст: непосредственный.
6. Шипачев, В.С. Основы высшей математики: учеб. пособие / В.С. Шипачев; под ред. акад. А. Н. Тихонова. – 2-е изд., стер. – Москва: Высшая школа, 1994. – 479 с. – Текст: непосредственный.
7. Шипачев, В.С. Высшая математика: учебник / В.С. Шипачев. – 4-е изд., стер. – Москва: Высшая школа, 1998. – 479 с. – Текст: непосредственный.
8. Шипачев, В.С. Задачник по высшей математике: учеб. пособие / В.С. Шипачев. – Москва: Высшая школа, 2003. – Текст: непосредственный.
9. Математический энциклопедический словарь / гл. ред. Ю.В. Прохоров. – Москва: Советская энциклопедия, 1988. – Текст: непосредственный.
10. Бронштейн, И.Н. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов / И.Н. Бронштейн, К.А. Семендяев. – Москва: Наука, 1986. – Текст: непосредственный.

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>Введение</b> .....	3
<b>МОНОТОННОСТЬ</b> .....	4
<b>ОГРАНИЧЕННОСТЬ</b> .....	9
<b>СХОДИМОСТЬ</b> .....	13
<b>Задачи для самостоятельного решения</b> .....	27
<b>Библиографический список</b> .....	31

Компьютерная верстка Т.В. Телелева

Темплан ФГБОУВО «ЗГУ» 2022 г. Поз. 15. Подписано в печать 11.02.2022.  
Формат 60x84 1/16. Бум. для копир.-мн.ап. Гарнитура *Bookman Old Style*.  
Печать плоская. Усл.п.л. 2,0. Уч.-издл. 2,0. Тираж 30 экз. Заказ 3.

663310, Норильск, ул. 50 лет Октября, 7. E-mail: RIO@norvuz.ru

Отпечатано с готового оригинал-макета в отделе ЦИТ ФГБОУВО «ЗГУ»