Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Заполярный государственный университет им. Н.М. Федоровского»
Политехнический колледж

Методические указания
к самостоятельной работе студентов
по дисциплине
«Математика»

Для специальности:
40.02.01 Право и организация социального обеспечения
(углубленная подготовка)

2025

Методические указания для студентов к самостоятельной работе по дисциплине «Математика» для специальности: 40.02.01 Право и организация социального обеспечения (углубленная подготовка)

Разработчик: Олейник М.В. – преподаватель

Рассмотрены на заседании предметно-цикловой комиссии
естественнонаучных дисциплин

Председатель комиссии ________________ М. В. Олейник

Утверждены методическим советом политехнического колледжа ФГБОУ ВО

«Заполярный государственный университет им. Н.М. Федоровского»

Протокол заседания методического совета №3 от «22» 01 2025 г.

Зам. Директора по УР ________________ А.В. Петухова

Пояснительная записка

Методические рекомендации для организации самостоятельной работы по дисциплине «Математика» предназначены для обучающихся второго курса по профессии СПО: 40.02.01 Право и организация социального обеспечения (углубленная подготовка).

Основная задача образования заключается в формировании творческой личности специалиста, способного к саморазвитию, самообразованию, инновационной деятельности. Решение этой задачи вряд ли возможно только путем передачи знаний в готовом виде от преподавателя к обучающемуся. Необходимо перевести обучающегося из пассивного потребителя знаний в активного их творца, умеющего сформулировать проблему, проанализировать пути ее решения, найти оптимальный результат и доказать его правильность. Следует признать, что самостоятельная работа обучающихся является не просто важной формой образовательного процесса, а должна стать его основой.

В соответствии с учебным планом на самостоятельную работу обучающихся отводится 35 часов.

Самостоятельная работа обучающихся проводится с **целью:**

1. Систематизации и закрепления полученных теоретических знаний и практических умений, обучающихся;

2. Углубления и расширения теоретических знаний;

3. Развития познавательных способностей и активности обучающихся: самостоятельности, ответственности и, способности к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации.

Методические указания по дисциплине «Математика» для выполнения самостоятельных работ созданы Вам в помощь для работы на занятиях, подготовки к ним. Приступая к выполнению самостоятельной работы, Вы должны внимательно прочитать цели и задачи занятия, ознакомиться с требованиями к уровню Вашей подготовки в соответствии с федеральными государственными образовательными стандартами третьего поколения, краткими теоретическими и учебно-методическими материалами по теме самостоятельной работы, ответить на вопросы для закрепления теоретического материала.

Свой вариант, а также сроки выполнения Вы всегда можете узнать у преподавателя. При выполнении самостоятельной работы можно пользоваться учебниками по математике для ССУЗов, Интернет источниками, дополнительной литературой.

Внимание! Если в процессе подготовки к самостоятельным работам или при решении задач у Вас возникают вопросы, разрешить которые самостоятельно не удается, необходимо обратиться к преподавателю для получения разъяснений или указаний в дни проведения консультаций.

Время проведения консультаций можно узнать у преподавателя или посмотреть на двери его кабинета.

Желаем Вам успехов!

№ п/п	Тема самостоятельных работ
1	**Теория комплексных чисел**
2	**Основные понятия и методы дискретной математики**
3	**Основные понятия и методы теории вероятностей и математической статистики**
4	**Основные понятия и методы линейной алгебры**

Самостоятельная работа обучающегося (всего) – 35 часов

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 1

Тема: Теория комплексных чисел

Реферат на тему «Мнимые числа»

Контрольные вопросы:

1) Какие числа называются комплексными мнимыми?
2) Что называется модулем комплексного числа?
3) Как выполняется сложение и вычитание комплексных чисел?
4) Как выполняется умножение комплексных чисел?
5) Как выполняется деление комплексных чисел?
6) Как выполняется возведение в степень мнимых и комплексных чисел

Литература:**[**1, с. 17 -23**]**

Тема: Действия над комплексными числами

Решение примеров по образцу. Подготовка к практической работе №1, №2 «Действия над комплексными числами

Цель работы:

уметь:

- выполнять действия над комплексными числами, представленными в различных формах.

Необходимые для выполнения работы знания:

студент должен:

знать:

- алгебраическую форму комплексного числа;
- тригонометрическую форму комплексного числа

Сведения из теории:

Определение:

Числа вида $a + bi,$ где a и $b -$ действительные числа, а число i, определяемое равенством $i^2 = -1$ есть мнимая единица, будем называть комплексными.

Числа a будем называть действительной частью комплексного числа, $bi -$ мнимой частью комплексного числа, $b -$ коэффициентом при мнимой части.

Запись комплексного числа в виде $a + bi$ называется алгебраической формой комплексного числа.

$a + bi$ и $c + di$ равны, если $a = c$ и $b = d.$

Действия над комплексными числами, заданные в алгебраической форме.

Сложение, вычитание, умножение комплексных чисел в алгебраической форме производят по правилам соответствующих действий над многочленами.

Два комплексных числа называются сопряженными, если они отличаются друг от друга только знаками перед мнимой частью.

Произведение двух сопряженных чисел всегда равно действительному числу. Воспользуемся этим свойством для выполнения деления двух комплексных чисел. Чтобы выполнить деление, произведем дополнительное действие: умножим делимое и делитель на комплексное число, сопряженное делителю.

1) Два комплексных числа называются равными, если равны их действительная и мнимая части, т. е. $a_1=a_2$; $b_1=b_2$.

2) Суммой двух комплексных чисел z_1 и z_2 называется комплексное число $z_1+z_2=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)i$

3) Произведением двух комплексных чисел z_1 и z_2 называется комплексное число $z_1z_2=(a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)i$

4) Модулем комплексного числа называется длина вектора соответствующего этому комплексному числу на плоскости и вычисляется по формуле:

5) Аргументом комплексного числа называется угол, образованный вектором с положительным направлением действительной оси и вычисляется по формуле: arg z=arg($a+bi$)=$\varphi + 2\pi k$/

Для нахождения аргумента необходимо:

1. Определить в какой координатной четверти находится комплексное число.

2. Найти в этой четверти угол, решив уравнение: $tg = \frac{b}{a}$; $\varphi = arg\frac{b}{a} = \varphi + \pi k, k \in Z$

Пример1.

Решить квадратное уравнение: $x^2 - 6x + 13 = 0$

Решение:

Решим квадратное уравнение и найдем корни:

$D = b^2 - 4ac$; $D = 36 - 4 \cdot 13 = -16$;

$x_{1,2} = \frac{6\pm\sqrt{-16}}{2\cdot1} = \frac{6\pm4i}{2}$; $x_1 = \frac{6+4i}{2} = 3 + 2i$; $x_2 = \frac{6-4i}{2} = 3 - 2i$

Действия над комплексными числами в тригонометрической форме.

$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ – тригонометрическая форма комплексного числа.

Правило перехода от алгебраической формы комплексного числа к тригонометрической.

1) Находят модуль комплексного числа r, для чего используют формулу $r = \sqrt{a^2 + b^2}$.
2) Для нахождения φ сначала определяют геометрически, в какой четверти находится точка z.
3) Составляют уравнения $\cos\varphi = \frac{a}{r}$ и $\sin\varphi = \frac{b}{r}$ и по решению одного из них находят угол φ.
4) Записывают комплексное число z в тригонометрической форме.

При умножении двух комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме, их модули перемножаются, а аргументы складываются:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

При делении комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме, их модули делятся, а аргументы вычитаются:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)$$

При возведении в степень комплексного числа, заданного в тригонометрической форме, модуль числа нужно возвести в n –ю степень, а аргумент на число n .

$$\boldsymbol{z^n = r^n(\cos\varphi n + i\sin\varphi n)}$$

$\boldsymbol{z = re^{i\varphi}}$ – *показательная форма комплексного числа.*

$\cos\varphi + i\sin\varphi = e^{i\varphi}$ –

называется формулой Эйлера.

Пример 2.

Записать число $z = 3\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ в показательной форме.

Решение:

Здесь $r = 3,\ \varphi = \frac{\pi}{4}$. Следовательно, показательная форма комплексного числа имеет вид $z = 3e^{\frac{\pi i}{4}}$.

Пример 3.

Упростить: $\frac{1+3i^9}{1+4i^{17}}$

Решение:

Сначала понизим степень мнимой части, используя (i^2=-1).

$i^9 = i^8 i = 1 \cdot i = i$

$i^{17} = i^{16} i = 1 \cdot i = i$

$\frac{1+3i^9}{1+4i^{17}} = \frac{1+3i}{1+4i} = \frac{(1+3i)(1-4i)}{(1+4i)(1-4i)} = \frac{1-4i+3i-12i^2}{1-16i^2} = \frac{13-i}{17}$.

Пример 4.

Вычислите: $(\sqrt{2}cos10° + isin10°)^2 \cdot 2(cos40° + isin40°)$

Решение:

Для первого комплексного числа используем формулу возведения в степень, а затем воспользуемся формулой произведения комплексных чисел:

$2(cos20° + isin20°) \cdot 2(cos40° + isin40°) = 4(cos60° + isin60°) = 4\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2 + 2i\sqrt{3}$.

Для извлечения корня n-й степени из комплексного числа $r(cos\varphi + isin\varphi)$ используется формула $z_k = \sqrt[n]{r(cos\varphi + isin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(cos\frac{\varphi+2\pi k}{n} + isin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right)$

Пример 5.

Извлечь корень из комплексного числа: $\sqrt{i}$

Решение:

Представим число i в тригонометрической форме: $i=0+1\cdot i=cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+isin\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

$$z_k=\sqrt{i}=\sqrt{cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+isin\left(\frac{\pi}{2}\right)}=\cos\frac{\pi/2+2\pi k}{2}+isin\frac{\pi/2+2\pi k}{2}$$
$$=cos(\pi/4+\pi k)+isin(\pi/4+\pi k)$$

если k=0, то $z_0=\cos\pi/4+isin\,\pi/4=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$;

если $k=1$, то $z_1=\cos(\pi/4+\pi)+i\sin(\pi/4+\pi)=$
$-\cos\pi/4-i\sin\pi/4=-\sqrt{2}/2-i\cdot\sqrt{2}/2$

Задания для самостоятельного решения:

1 Запишите комплексные числа в тригонометрической форме

1) $-i$; 3) $-1+i$; 5) $\sqrt{3}-i$

2) $1+i$; 4) $-1-i$; 6) $4-3i$

2 Вычислите:

1) $5(\cos 10^\circ+i\sin 10^\circ)\cdot 2(\cos 80^* +i\sin 80^\circ)$;

2) $3(\cos 50^\circ+i\sin 50^\circ)\cdot 4(\cos 70^\circ+i\sin 70^\circ)$;

3) $2\left(\cos\frac{\pi}{7}+i\sin\frac{\pi}{7}\right)\cdot 6\left(\cos\frac{6}{7}\pi+i\sin\frac{6}{7}\pi\right)$;

4) $\left(\cos\frac{3}{4}\pi+i\sin\frac{3}{4}\pi\right)\cdot 5\left(\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi\right)\cdot 7\left(\cos\frac{7}{12}\pi+i\sin 12\pi\right)$;

5) $(1+i)^{25}$;

6) $\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-i}\right)^{20}$;

7) $(\sqrt{3}+i)^n$;

8) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)^{200}$;

9) $\frac{\cos 140^\circ+i\sin 140^\circ}{\cos 50^\circ+i\sin 50^\circ}$;

10) $\frac{\cos 130^\circ+i\sin 130^\circ}{\cos 40^\circ+i\sin 40^\circ}$;

11) $\frac{5(\cos 109^\circ+i\sin 109^\circ)}{3(\cos 49^\circ+i\sin 49^\circ)}$;

3 Найдите все значения корня

1) $\sqrt{1-i\sqrt{3}}$; 2) $\sqrt{2i}$; 3) $\sqrt{3-4i}$ 4) $\sqrt[3]{1}$;

5) $\sqrt[4]{-1}$; 6) $\sqrt[3]{1+i}$); 7) $\sqrt[3]{(1+i)^3}$; 8) $\sqrt[3]{i}$

Контрольные вопросы:

7) Какие числа называются комплексными мнимыми?
8) Что называется модулем комплексного числа?
9) Как выполняется сложение и вычитание комплексных чисел?
10) Как выполняется умножение комплексных чисел?
11) Как выполняется деление комплексных чисел?
12) Как выполняется возведение в степень мнимых и комплексных чисел?

Литература:**[**1, с. 17 -23**]**

Тема 2.1 Основные понятия и методы дискретной математики

Самостоятельная работа: Решение примеров по образцу. Подготовка к практической работе №3 «Операции над множествами». Решение примеров по образцу

"Операции над множествами"

Цель работы:

уметь:

- находить пересечение, объединение, разность множеств;
- находить элементы множества.

Необходимые для выполнения работы знания:

студент должен:

знать:

- определение множества;
- элементы множества и их обозначения.

Сведения из теории:

Множества обозначают большими латинскими буквами, например, A, B, C, D,... и. д.

Объекты, из которых состоит множество, называются его элементами. Их обозначают маленькими латинскими буквами: a, b, c, d,... и. д.

Если множество состоит из элементов a, b, c, n, то записывают: A=$\{a, b, c, n\}$.

Множество, которое не содержит ни одного элемента, называется пустым и обозначается символом $\emptyset$.

Множество, состоящее из чисел, называют числовыми.

N-Множество натуральных чисел,

Z - Множество целых чисел,

Q - Множество рациональных чисел,

R - Множество действительных чисел.

Между двумя множествами существует пять видов отношений. Если множества A и B не имеют общих элементов, эти множества не пересекаются и записывают так: A∩B=$\emptyset$.

Например, A = $\{1, 2, 5, 7\}$ и B = $\{3, 4.8, 9\}$, общих элементов у этих множеств нет, поэтому множества не пересекаются.

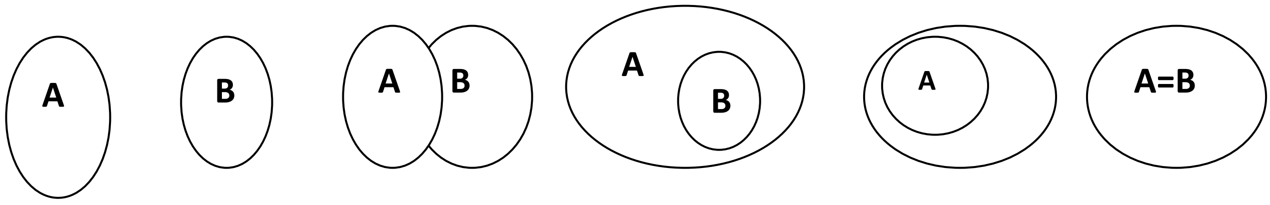
Если множества A и B имеют общие элементы, то эти множества пересекаются и записывают: $A \cap B \neq \emptyset$.

Например, $A = \{1, 2, 5, 7, 8\}$ и $B = \{3, 5, 7, 9\}$ пересекаются, т. к. у них есть общие элементы 5, 7.

Множество B является подмножеством A, если каждый элемент множества B является также элементом множества A.

Если множества состоят из одних и тех же элементов, то они называются равными.

Существует пять случаев отношений между двумя множествами.

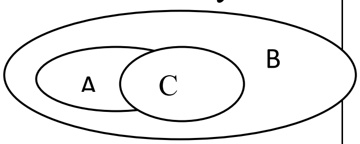
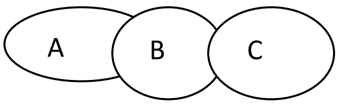
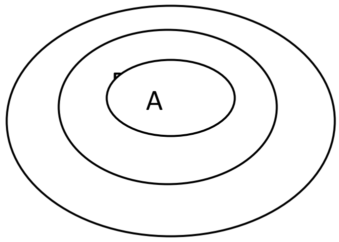
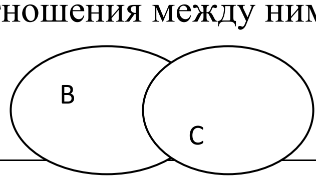


Пересечением множеств А и В называется множество, содержащее все элементы, которые принадлежат множеству А и множеству В. Обозначают: $A \cap B$.
Объединением множеств А и В называется множество, содержащее все элементы, которые принадлежат множеству А или множеству В. Обозначают: $A \cap B$.

Пример 13.
Пусть А - множество чисел, кратных 2, а В - множество, чисел, кратных 3.
$A = \{2, 4, 6, 8,10,12,14,16\}$ $B = \{3, 6, 9, 12, 15\}$. Найти пересечение и объединение множеств А и В.
$A \cap B = \{6, 12\}$
$A \cup B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 3, 9, 15\}$

Разностью множеств А и Вназывается множество, содержащее те и только те элементы, которые принадлежат множеству А, и не принадлежат множеству В. Обозначают $A \backslash B$.
Например, если $A = \{a, b, c, d, l, m\}$ и $B = \{a, b, c\}$, то $A \backslash B = \{d, l, m\}$.

План работы:

1 вариант 1) Приведите примеры множеств А, В, С, если отношения между ними  таковы: 2)Образуйте все подмножества множества в слове "крот". Сколько подмножеств получилось?	2 вариант 1) Приведите примеры множеств А, В, С, если отношения между ними  таковы: 2) Даны множества $A = \{a, b, c, d, e, f, k\}$ и $B = \{a, c, e, k, m, p\}$. Найдите $A \cup B, A \cap B, A/B$,	3 вариант 1) Приведите примеры множеств А, В, С, если между ними  таковы: 2) Известно, что А - множество спортсменов группы, В - множество отличников группы. Сформулируйте условия, при которых $A \cap B = \emptyset$
4 вариант 1) Приведите примеры множеств А, В, С, если отношения между ними таковы: $A \cap B = 5$, $A \backslash B = 2$.	**5 вариант** 1) Приведите примеры множеств А, В, С, если отношения между ними таковы: $A \cap B = \{a, b, c, k, e\}$, $A \backslash B = 2$.	**6 вариант** 1) Приведите примеры множеств А, В, С, если отношения между ними 

2) Известно, что А- множество спортсменов группы, В - множество отличников группы. Сформулируйте условия, при которых $A \cup B = A$.	2) Известно, что А - множество целых чисел, В - множество натуральных чисел. Сформулируйте условия, при которых $A \cup B = A$.	таковы: 2) Известно, что А - множество животных, В - множество домашних животных. Сформулируйте условия, при которых $A \cap B = \emptyset$

Контрольные вопросы:
1) Дайте определение множества.
2) Перечислите виды отношений и приведите примеры.
Литература: **[5, с 11 - 16]**

Тема 2.1 Основные понятия и методы дискретной математики

Самостоятельная работа: Подготовка к практической работе «Закон распределения дискретной случайной величины. Формула Бернулли», «Математическое ожидание, дисперсия и квадратичное отклонение дискретной случайной величины»

Цель работы:
уметь:
- находить Закон распределения дискретной случайной величины;
- применять формулу Бернулли.

Необходимые для выполнения работы знания:
студент должен:
знать:
- формулы: Математическое ожидание, дисперсия и квадратичное отклонение дискретной случайной величины

.

Сведения из теории:

Понятие случайной величины.

Определение. *Случайной величиной* называют переменную величину, которая в зависимости от исхода испытания случайно принимает одно значение из множества возможных значений.

Обозначение случайных величин: X, Y, Z, ... ; возможных значений соответствующих случайных величин: x, y, z, …

Например:

1) При однократном бросании игральной кости число выпавших очков – это случайная величина, она может принять одно из значений: 1, 2, 3, 4, 5, 6.

2) Число родившихся мальчиков среди 3 новорождённых – это случайная величина, которая может принять одно из значений: 0, 1, 2, 3

Определение. *Дискретной случайной величиной* называют случайную величину, принимающую различные отдельные изолированные друг от друга значения с определёнными вероятностями.

Число возможных значений дискретной случайной величины может быть конечным и бесконечным.

Непрерывной случайной величиной называют случайную величину, которая может принимать любые значения изнекоторого числового промежутка.

Число возможных значений непрерывной случайной величины бесконечно.

Примером непрерывной случайной величины является приростveса домашнего животного за месяц, рост человека, температура воздуха.

Определение. *Законом распределения случайной величины* называют любое правило (таблица, функция, график), указывающее вероятности отдельных значений случайной величины или множества этих значений.

2 Закон распределения дискретной случайной величины.

Будем рассматривать дискретные случайные величины, множество допустимых значений которых конечно.

Закон распределения дискретной случайной величины удобнозадавать в виде таблицы, в которой первая строка содержит возможные значения $x_1, x_2, ... x_n$ величины X (обычно в порядке возрастания), а вторая строка – их вероятности $P_1, P_2, ... P_n$

X	x_1	x_2	$\dots$	x_n
P	P_1	P_2	$\dots$	P_n

Так как в результате испытания величина X всегда примет одно значение из множества возможных значений $x_1, x_2, ... x_n$ то сумма всех вероятностей равна единице:

$$P_1 + P_2 + ... + P_n = 1$$

Закон распределения дискретной случайной величины можнозадавать графически. Для этого на оси Оx откладывают возможные значения x_i случайной величины X, а на оси Oy – их вероятности p_i .

Многоугольником (*полигоном*) *распределения* дискретной случайной величины X называют ломаную, соединяющую последовательно точки $(x_1, p_1), (x_2, p_2), ..., (x_n, p_n)$.

Пример 34

В денежной лотерее выпущено 100 билетов. Разыгрывается 2 выигрыша по 50 рублей и 30 выигрышей – по 1 рублю. Найти закон распределения случайной величины X – стоимости выигрыша для владельца одного лотерейного билета. Построить многоугольник распределения.

Решение.

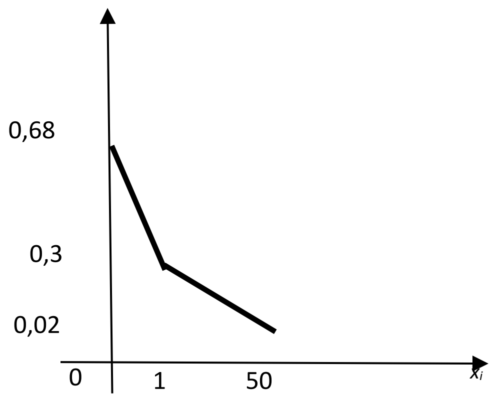
Случайная величина X может принять следующие значения (выигрыш в рублях): $x_1 = 0, \; x_2 = 1, \; x_3 = 50$, причём $p_2 = \frac{30}{100} = 0,3 \quad p_3 = \frac{2}{100} = 0,02$. Из равенства $p_1 + p_2 + p_3 = 1$ можно найти p_1: $p_1 = 1 - p_2 - p_3 = 0,68$

Запишем закон распределения:

X	0	1	50
p	0,68	0,3	0,02

Проверка $0,02 + 0,3 + 0,68 = 1$

Построим многоугольник распределения:



3 Функция распределения случайной величины.

Для непрерывной случайной величины в отличие от дискретной случайной величины нельзя построить таблицу распределения вероятностей.

Универсальным способом задания закона распределения вероятностей и непрерывной случайной величины, и дискретной случайной величины является функция распределения случайной величины.

Определение. *Функцией распределения* случайной величины X,или *интегральной функцией распределения*, называется функция $F(x)$, равная вероятности того, что величина X приняла значение, меньшее x:

$$F(x) = P(X < x).$$

Свойства функции распределения.

1. $0 \le F(x) \le 1$ (так как $F(x)$ – это вероятность).

2. $F(x)$ – неубывающая функция:

$$x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad F(x_1) \le F(x_2)$$

3. Вероятность попадания случайной величины X в полуинтервал $[a;b)$ равна разности между значениями функции распределения в правом и левом концах указанного полуинтервала:

$$P(a \le X \le b) = F(b) - F(a)$$

4. Вероятность попадания непрерывной случайной величины X примет какое-либо заранее заданное значение, равно 0:

$$P(X = x_1) = 0$$

5. Вероятности попадания непрерывной случайной величины X в интервал, отрезок или полуинтервал с одними и теми же концами одинаковы:

$$P(a < X < b) = P(a \le X \le b) = P(a \le X < b) = P(a < X \le b)$$

6. Если возможные значения случайной величины X принадлежат интервалу $(a; b)$, то при $x \le a$ $F(x) = 0$, при $x \ge b$ $F(x) = 1$.

7. Для непрерывной случайной величины с возможными значениями на всей числовой оси справедливы равенства $F(-\infty) = 0$, $F(+\infty) = 1$

Определение. Случайная величина называется *непрерывной,* если её функция распределения непрерывна в любой точке и дифференцируема всюду, кроме, может быть, отдельных точек.

Функция распределения дискретной случайной величины имеет вид $F(x) = \sum\limits_{x_i < x} p_i$. Здесь суммирование ведётся по всем i, для которых $x_i < x$.

Функция распределения дискретной случайной величины является функцией с разрывами. Её график имеет ступенчатый вид.

Пример 35

По условию примера 34 найти функцию распределения $F(x)$ и построить ее график.

Решение

X – стоимость выигрыша для владельца одного лотерейного билета – дискретная случайная величина.

Закон распределения известен:

X	0	1	50
p	0,68	0,3	0,02

Будем задавать различные значения x и находить для них $F(x) = P(X < x)$.

Если $x \le 0$, то $F(x) = 0$ (по свойству 6).

Если $0 < x \le 1$, то $F(x) = P(X < 1) = P(X = 0) = 0{,}68$.

Если $1 < x \le 50$, то $F(x) = P(X < 50)$. Здесь событие $X < 50$ состоит в том, что произойдет либо событие $X = 1$, либо событие $X = 0$, которые несовместны. Следовательно, по теореме сложения вероятностей несовместных событий имеем

$$F(x) = P(X < 50) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0{,}68 + 0{,}3 = 0{,}98$$

Если $x > 50$, то $F(x) = 1$ (по свойству 6).

Итак, запишем функцию распределения $F(x)$ аналитически:

$$F(x)=\begin{cases}0 & при \quad x \le 0,\\ 0{,}68 & при \quad 0 < x \le 1,\\ 0{,}98 & при \quad 1 < x \le 50,\\ 1 & при \quad x > 50\end{cases}$$

График функции распределения $F(x)$:

Закон распределения полностью характеризует случайную величину. Однако при решении многих задач достаточно знать лишь некоторые числовые характеристики случайной величины, которые описывают отдельные существенные свойства закона распределения случайной величины.

Пусть дискретная случайная величина задана законом распределения:

X	x_1	x_2	…	x_n
P	P_1	P_2	…	P_n

4 Математическое ожидание дискретной случайной величины.

Математическим ожиданием $M(X)$ дискретной случайной величины X называют сумму произведений всех ее возможных значений на их вероятности:

$$M(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i = x_1 p_1 + x_2 p_2 + ... + x_n p_n$$

Замечания:

1) Математическое ожидание дискретной случайной величины является неслучайной (постоянной) величиной.

2) Математическое ожидание $M(X)$ является средним значением дискретной случайной величины X (центром распределения).

3) Математическое ожидание числа появлений события в одном испытании равно вероятности этого события.

Пример 36

Найти математическое ожидание дискретной случайной величины X, заданной законом распределения:

X	*-1*	*5*
P	*0,4*	*0,6*

Решение

$$M(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i = x_1 p_1 + x_2 p_2 = -1\cdot 0{,}4 + 5\cdot 0{,}6 = -0{,}4 + 3 = 2{,}6$$

Свойства математического ожидания дискретной случайной величины.

1. Математическое ожидание постоянной величины равно самой постоянной: $M(C)=C, \quad C = const$.

2. Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания: $M(CX)=C\cdot M(X), \quad C = const$.

3. Если X, Y независимые случайные величины, то

$M(X+Y)=M(X)+M(Y)$;

$M(X\cdot Y)=M(X)\cdot M(Y)$

5 Дисперсия дискретной случайной величины

Пусть X – случайная величина, $M(X)$ – ее математическое ожидание.

Разность $X-M(X)$ называют *отклонением* случайной величины X от ее математического ожидания $M(X)$.

Дисперсией (расстоянием) $D(X)$ дискретной случайной величины X называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания:

$$D(X)=M\left[(X-M(x))^2\right]=\sum_{i=1}^{n}(x_i-M(X))^2 p_i=(x_i-M(X))^2 p_2+\ldots+(x_n-M(X))^2 p_n$$

Дисперсия характеризует разброс (рассеивание) значений случайной величины относительно ее математического ожидания.

Свойства дисперсии дискретной случайной величины.

1. $D(X)=M\left(X^2\right)-(M(X))^2$.

2. Дисперсия постоянной величины равна нулю: $D(C)=0 \quad C=const$

3. Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возводя его в квадрат: $D(CX)=C^2\cdot D(X), \quad C=const$

4. Если X, Y независимые случайные величины, то

$D(X+Y)=D(X)+D(Y)$;

$D(XY)=M\left(X^2\right)\cdot M\left(Y^2\right)-(M(X))^2\cdot(M(Y))^2$.

Пример 37

Найти дисперсию дискретной случайной величины X, заданной законом распределения

X	1	2	3
P	0,2	0,3	0,5

Решение

Вычислим дисперсию по свойству 1

$$D(X)=M\left(X^2\right)-(M(X))^2$$

Найдем математическое ожидание величины X:

$$M(X)=\sum_{i=1}^{3}x_i p_i=x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3=1\cdot 0{,}2+2\cdot 0{,}3+3\cdot 0{,}5=0{,}2+0{,}6+1{,}5=2{,}3$$

Запишем закон распределения квадрата случайной величины X:

X^2	1	4	9
P	0,2	0,3	0,5

Математическое ожидание квадрата случайной величины X равно:

$$M\left(X^2\right)=1\cdot 0{,}2+4\cdot 0{,}3+9\cdot 0{,}5=0{,}2+1{,}2+4{,}5=5{,}9$$

Тогда получим

$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2 = 5{,}9 - 2{,}3^2 = 5{,}9 - 5{,}29 = 0{,}61$

6. Среднее квадратическое отклонение дискретной случайной величины

Дисперсия имеет размерность квадрата случайной величины X, что в сравнительных целях неудобно. Когда желательно, чтобы оценка разброса имела размерность случайной величины X, используют другую числовую характеристику – среднее квадратическое отклонение.

Средним квадратическим отклонением дискретной случайной величины X называют квадратный корень из ее дисперсии:

$$\delta(X) = \sqrt{D(X)}$$

Пример 38

Найти среднее квадратическое отклонение случайной величины X, заданной законом распределения (см пример 37)

X	1	2	3
P	0,2	0,3	0,5

Решение

Так как $D(X) = 0{,}61$, то

$\delta(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{0{,}61} \approx 0{,}78$

Задания для самостоятельного решения:

1. Определить, закон распределения какой из дискретных случайных величин X или Y верен.

X	–1	0	1	4
p	0,	0,	0,	0,

Y	–2	1	3
p	0,	0,	0,

2. Найти k, при котором закон распределения дискретной случайной величины X задаётся таблицей:

X	1	4	5	7
p	0,2	0,1	k	0,4

3. В партии имеется 15 рубашек, из них 5 имеют скрытый дефект. Покупают 3 рубашки. Найти закон распределения случайной величины X – числа дефектных рубашек среди купленных.

4. В урне имеется 7 белых и 3 чёрных шара. Из урны извлекают шар 2 раза подряд, причём каждый раз вынутый шар возвращается в урну и шары перемешиваются. Найти закон распределения случайной величины X – числа извлечённых белых шаров.

5. Найти числовые характеристики (математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение) дискретной случайной величины X, заданной законом распределения:

X	-1	4
p	0,2	0,8

6. Для дискретной случайной величины X известно $M(X) = 4, \quad M(X^2) = 25$. Найти ее среднее квадратическое отклонение $\delta(X)$

7. В урне имеется 5 шаров с номерами от 1 до 5. Вынули 2 шара. Случайная величина X – сумма номеров шаров. Найти закон распределения и числовые характеристики величины X.

8. Независимые дискретные случайные величины X и Y заданы следующими законами распределения:

X	-2	-1	1
p	0,1	0,8	0,1

Y	0	1	2
p	0,5	0,4	0,1

9. Стрелок делает по мишени три выстрела. Вероятность попадания в мишень при каждом выстреле равно 0,8. Пусть случайная величина X – число попаданий в мишень. Найти закон распределения величины X.

Контрольные вопросы:

1. Что называется случайной величиной?
2. Какая случайная величина называется дискретной (непрерывной)?
3. Дайте определение закона распределения случайной величины.
4. Что называется, многоугольником распределения дискретной случайной величины?

Тема 3.1 Основные понятия и методы теории вероятностей

Самостоятельная работа: Решение примеров по образцу. Подготовка к практической работе «Элементы комбинаторики. Перестановки, размещения, сочетания»

Самостоятельная работа: Решение примеров по образцу Подготовка к практическим работам «Решение простейших задач теории вероятностей», «Теорема сложения и умножения вероятностей. Формула полной вероятности. Формула Байеса»

Сведения из теории

Тема: Комбинаторика. Выборки элементов. Сумма и произведение событий. Вероятность появления хотя бы одного события Повторные независимые испытания Повторные независимые испытания.

На практике часто приходится выбирать из некоторого множества объектов подмножества элементов, обладающих теми или иными свойствами, располагать элементы одного или нескольких множеств в определённом порядке и т. д. Поскольку в таких задачах речь идёт о тех или иных комбинациях объектов, их называют «комбинаторные задачи».

Комбинаторика – это раздел математики, в котором рассматриваются задачи о тех или иных комбинациях объектов.

Рассмотрим два основных закона, с помощью которых решаются многие задачи комбинаторики – правила суммы и произведения.

Правило суммы.

Если имеется n попарно непересекающихся множеств $A_1, A_2, ..., A_n$, содержащих $m_1, m_2, ..., m_n$ элементов соответственно, то число способов, которыми можно выбрать один элемент из всех этих множеств, равно

$$S = m_1 + m_2 + ... + m_n .$$

Правило произведения.

Если имеется n попарно непересекающихся множеств $A_1, A_2, ..., A_n$, содержащих $m_1, m_2, ..., m_n$ элементов соответственно. Элемент $a_1 \in A_1$ можно выбрать m_1 способами, при любом выборе $a_1 \in A_1$ элемент $a_2 \in A_2$ можно выбрать m_2 способами и т.д., элемент $a_n \in A_n$ можно выбрать m_n способами. Тогда n элементов $(a_1, a_2, ..., a_n)$ можно выбрать $m_1 \cdot m_2 \cdot ... \cdot m_n$

$$P = m_1 \cdot m_2 \cdot ... \cdot m_n$$

В разных задачах в описываемых наборах объектов элементы могут повторяться, а могут и не повторяться. В зависимости от этого различают:

1) *комбинаторику без повторений*;
2) *комбинаторику с повторениями*.

И для первого, и для второго случая различают по три основных вида комбинаций объектов:

а) *размещения*;
б) *перестановки*;
в) *сочетания*.

Рассмотрим все шесть имеющихся случаев.

Определение. *Размещением без повторений* из n элементов по k элементам ($k < n$) называется множество упорядоченных наборов, состоящих из k элементов, взятых из n элементов, причём в этих наборах элементы не повторяются. Число таких наборов определяется по формуле:

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)...(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)\ !}$$

Пример 27

В группе из 25 студентов надо выбрать старосту, профорга и культорга. Сколькими способами это можно сделать?

Решение

Так как из 25 человек выбираются трое человек с раз-личной специализацией (староста, профорг, культорг), то порядок людей в наборе важен, следовательно, имеем дело с числом размещений без повторений из 25 по 3, то есть

$A_{25}^{3} = 25 \cdot 24 \cdot 23 = \frac{25!}{22!} = 13800$

Итак, троих активистов из 25 человек можно выбрать 13800 способами.

Определение. *Размещением с повторениями* из n элементов по k элементам называется множество упорядоченных наборов, состоящих из k элементов, взятых из n элементов, причём в этих наборах элементы могут повторяться. Число таких наборов определяется по формуле:

$$\overline{A}_{n}^{k} = n^{k}$$

Пример 28

Группа из 25 студентов сдаёт экзамен, по которому студенты могут получить оценки: 2, 3, 4, 5. Сколькими способами может быть заполнена экзаменационная ведомость?

Решение. Для каждого студента выбирается одна оценка из четырёх, всего выбор делается 25 раз. Возможны повторения, так как каждая оценка может быть выбрана любое количество раз. Порядок важен, так как он показывает, какому именно студенту достаётся выбранная оценка. Следовательно, число способов есть число размещений с повторениями из 4 по 25:

$\overline{A}_{4}^{25} = 4^{25} = 1{,}126 \cdot 10^{15}$

Итак, экзаменационная ведомость может быть заполнена $1{,}126 \cdot 10^{15}$ способами.

Определение. *Перестановкой без повторений* из n элементов называется множество всевозможных перестановок данных n элементов.

Перестановка без повторений – частный случай размещения без повторений при $k = n$. Число таких наборов определяется по формуле:

$$P_n = n!$$

Иными словами, число способов упорядочить данное множество, состоящее из n элементов, равно $P_n = n!$

Пример 29 Сколькими способами можно расставить в шеренгу студентов группы из 8 человек?

Решение. Число способов есть число перестановок без повторений из 8 элементов, то есть

$P_8 = 8! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 40320$

Итак, расставить в шеренгу студентов группы из 8 человекможно 40320 способами.

Определение Перестановкой с повторениями набора элементов $n_1, n_2, .., n_k$

(где 1-й элемент повторяется n_1 раз, 2-й элемент повторяется n_2 раз и т.д., k – й элемент повторяется n_k раз) называется множество выборок длины

$n = n_1 + n_2 + ... + n_k$, в которых 1-й элемент повторяется n_1 раз, 2-й элемент повторяется n_2 раз и т.д., k –й элемент повторяется n_k раз делается по формуле:

$$\overline{P_n} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot ... \cdot n_k!} = \frac{(n_1 + n_2 + ... + n_k)!}{n_1! \cdot n_2! \cdot ... \cdot n_k!}$$

Пример 30 Сколько новых «слов» можно получить перестановкой букв слова МАТЕМАТИКА?

Решение. Так как мы переставляем буквы одного слова, тоимеем перестановку. В данном слове буквы повторяются, а значит, перестановка будет с повторениями. В слове МАТЕМАТИКА всего 10 букв, из них: буква «М» присутствует 2 раза, буква «А» – 3 раза, буква «Т» – 2 раза, буквы «Е», «И», «К» по одному разу. Получаем

$$P_{10}(2,3,2,1,1,1) = \frac{10!}{2! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1!} = 151200$$

Итак, всего можно получить 151200 новых «слов».

Определение. *Сочетанием без повторений* из n элементов по k элементам ($k < n$) называется множество неупорядоченныхнаборов, состоящих из k элементов, взятых из n элементов, причём в этих наборах элементы не повторяются. Число таких наборов определяется по формуле:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Имеют место следующие соотношения:

1) $C_n^k = C_n^{n-k}$;

2) $C_n^0 = C_n^n = 1$

Пример 31 Сколькими способами из группы в 25 человек можно выбрать баскетбольную команду из пяти человек?

Решение. Так как из 25 человек выбираются 5 человек и порядок, в котором выбираются члены команды, не важен, то число способов есть число сочетаний без повторений из 25 по 5, то есть

$$C_{25}^5 = \frac{25!}{5! \cdot 20!} = 53130 \quad .$$

Итак, из группы в 25 человек можно выбрать баскетбольную команду 53 130 способами.

Определение. *Сочетанием с повторениями* из n элементов по k элементам называется множество неупорядоченных наборов, состоящих из k элементов, взятых из n элементов, причём в этих наборах элементы могут повторяться. Число таких наборов определяется по формуле:

$$\overline{C}^k = C_{n+k-1}^{n-1} = C_{n+k-1}^k$$

Пример 32 В магазине имеется 15 сортов конфет. Некто покупает 10 конфет. Сколькими способами можно совершить покупку?

Решение. Имеем 15 множеств (сортов) конфет, из которых производится выбор 10 конфет. Конфеты в наборе могут повторяться (возможно, что все 10 конфет будут одного сорта), порядок конфет в наборе не имеет значения. Получаем

$$\overline{C}_{15}^{10} = C_{15+10-1}^{10} = C_{24}^{10} = \frac{24!}{10!\cdot 14!} = 1961256 \quad .$$

Итак, возможно 1961256 различных наборов конфет.

Очень часто бывает трудно определить, какая из шести комбинаций должна быть применена в каждом конкретном случае. Тогда можно воспользоваться следующей схемой:

1. Находим *основное множество*, из которого осуществляется выбор. Количество элементов этого множества есть n.

2. Если требуется:

– упорядочивать элементы *основного множества* местами, то имеем перестановку (при не повторении в полученном наборе элементов *основного множества* получаем перестановку без повторений, а при повторении – перестановку с повторениями;

– выбрать часть *основного множества*, то находим k – число элементов *множества выбора*.

3. Важен ли порядок элементов *множества выбора*?

– Если порядок важен, то имеем размещения (при не повторении элементов *основного множества* во *множестве выбора* – без повторений, а при повторении – с повторениями.

– Если порядок не важен, то имеем сочетания (при не повторении элементов *основного множества* во *множестве выбора* – без повторений, а при повторении – с повторениями.

Заметим, что иногда необходимо применять описанные выше правила *суммы* и *произведения*.

Пример 33 В кружке художественного слова занимается 15 человек, в фортепианном кружке – 10, в вокальном – 12 и в фото- кружке – 20. Сколькими способами можно составить группу из 4 чтецов, 3 пианистов, 5 певцов и одного фотографа?

Решение

Разобьем задачу на подзадачи. Сначала найдем, сколькими способами можно выбрать чтецов.

1 Производим выбор из 15 человек, то есть $n = 15$.

2 Выбираем четырех человек, то есть $k = 4$

3 Порядок людей в группе не важен, а значит, мы имеем дело с сочетанием. Так как люди выбираются разные, то это будут сочетания без повторений – C_{15}^{4} .

Проводя аналогичные рассуждения, выбираем:

Пианистов:3 из 10 – C_{10}^{3} способами, Певцов: 5 из 12 – C_{12}^{5},

Фотографа 1 из 20 – C_{20}^{1}

Поскольку выбор производится по все четырем позициям, а не по одной, применяем правило произведения. Итак, группу можно составить

$N = C_{15}^{4} \cdot C_{10}^{3} \cdot C_{12}^{5} \cdot C_{20}^{1} = 2{,}595 \cdot 10^{9}$ способами.

Задания для самостоятельного решения:

1 Сколькими способами можно выбрать один цветок из корзины, в которой имеется 10 тюльпанов, 8 роз и 5 гладиолусов?

2Из 6 первокурсников, 5 второкурсников и 7 третьекурсников надо выбрать 3 студентов на конференцию. Сколькими способами можно это сделать, если выбранные студенты должны быть с разных курсов?

3 Из 8 мальчиков и 10 девочек класса для участия в эстафетенадо составить 3 команды, каждая из которых состоит из мальчика и девочки. Сколькими способами это можно сделать?

4 Сколько различных «слов» из трёх букв можно составить из букв слова ЗАЧЁТ?

5 Сколькими способами можно выбрать 3 различных пирожка из 8 видов, имеющихся в буфете?

6 Сколько различных пятибуквенных «слов» можно составить из букв слова ВОЛГА. Сколько среди них таких, которые начинаются буквой В и заканчиваются буквой А?

7 Студенты 1 курса изучают 12 дисциплин. Сколькими способами можно составить расписание на среду, если в этот день должно быть 5 различных предметов?

8 Сколькими способами можно расставить 6 различных книгна полке, чтобы определённые 3 книги стояли рядом?

9 Сколькими способами 3 награды могут быть распределенымежду 7 участниками олимпиады?

10 В корзине лежит 8 морковок, 6 картошек, 5 огурцов. Сколькими способами можно выбрать 4 овоща из корзины? Сколькими способами можно выбрать 1 морковку и 2 картошки?

11 Сколько различных трёхзначных чисел (цифры не повторяются) можно составить из цифр числа 4689?

12 Из цифр 1, 5, 7, 8 составлены различные трёхзначные числа. Сколько из них чётных?

13 Сколько перестановок можно составить из букв слова ОСИНА, в которых буква И стоит на третьем месте?

14 У одного студента имеется 5 различных карандашей, а у другого – 8. Сколькими способами они могут осуществить обмен: карандаш на карандаш? два карандаша на два карандаша?

15 В урне имеется 10 белых и 7 чёрных шаров. Сколькими способами можно выбрать 4 шара, чтобы среди них был 1 белый и3 чёрных шара?

16 Из группы, состоящей из 7 юношей и 5 девушек, надо выбрать 4 человек так, чтобы среди них было не менее двух юношей. Сколькими способами это можно сделать?

Контрольные вопросы:

1. Что является предметом комбинаторики?
2. Сформулируйте правила суммы и произведения.
3. Дайте определение размещений без повторений (с повторениями).
4. Дайте определение сочетаний без повторений (с повторениями).
5. Дайте определение перестановок без повторений (с повторениями).
6. Сформулируете схему решения задач комбинаторики.

Тема 3.2 Введение в математическую статистику

Самостоятельная работа

Построение статистической функции распределения ее графика

Цель: решение задач на построение для заданной выборки ее графической диаграммы, расчёта по заданной выборке её числовых характеристик, развитие логического и творческого мышления студентов, самостоятельной деятельности, вычислительных навыков.

Задания для самостоятельного решения:

Вариант 1.

№ 1. Для выборки 7,-7,2,7,7,5,5,7,5,-7 определите: а) размах выборки; б) объём выборки; в)статистический ряд; г) выборочное распределение; д) полигон частот; е) выборочное среднее; ж)выборочную дисперсию; з) несмещенную выборочную дисперсию.

№ 2. Построить гистограмму частот по данному распределению выборки.

Номер интервала	Частичный интервал	Сумма частот
1	10-15	2
2	15-20	4
3	20-25	8
4	25-30	4
5	30-35	2

Замечание. Найти предварительно плотность частоты для каждого интервала.

Вопросы для самопроверки.

1. Дайте определение вариационного ряда.
2. Что называется размахом выборки?
3. Как для данной выборки получают статистический ряд и выборочное распределение?
4. Какие графические изображения выборок вы знаете?
5. Чему равна площадь гистограммы относительных частот?
6. Дайте определение выборочного среднего.

7. Дайте определение выборочной дисперсии.
8. Как связаны между собой выборочная дисперсия и несмещенная выборочная дисперсия?

Вариант 2.

№ 1. Для выборки 5,2,8,-2,5,-2,0,0,8,5 определите: а) размах выборки; б) объём выборки; в)статистический ряд; г) выборочное распределение; д) полигон частот; е) выборочное среднее; ж)выборочную дисперсию; з) несмещенную выборочную дисперсию.

№ 2. Построить гистограмму частот по данному распределению выборки.

Номер интервала	Частичный интервал	Сумма частот
1	2-5	6
2	5-8	7
3	8-11	4
4	11-14	5
5	14-17	3

Замечание. Найти предварительно плотность частоты для каждого интервала.

Контрольные вопросы:

1. Дайте определение вариационного ряда.
2. Что называется размахом выборки?
3. Как для данной выборки получают статистический ряд и выборочное распределение?
4. Какие графические изображения выборок вы знаете?
5. Чему равна площадь гистограммы относительных частот?
6. Дайте определение выборочного среднего.
7. Дайте определение выборочной дисперсии.
8. Как связаны между собой выборочная дисперсия и несмещенная выборочная дисперсия?

Тема 4.1 Основные понятия и методы линейной алгебры

Самостоятельная работа: Подготовка к практической работе «Операции над матрицами»

Самостоятельная работа: «Решение систем линейных уравнений» "Решение систем линейных алгебраических уравнений".

Цель работы:

уметь:

вычислять определитель матрицы второго и третьего порядка;
- выполнять действия над матрицами;
- решать системы линейных алгебраических уравнений.

Необходимые для работы знания:

Студент должен:

знать:

- определение матрицы;
- формулу определителя матрицы второго и третьего порядка;
- методы решения систем линейных уравнений.

Сведения из теории:

Решение систем линейных уравнений методом Крамера:

<u>Теорема.</u>

Система n уравнений с n неизвестными, определитель которой отличен от нуля, всегда имеет решение и притом единственное. Оно находится следующим образом: значение каждого из неизвестных равно дроби, знаменателем которой является определитель системы, а числитель получается из определителя системы заменой столбца коэффициентов при искомом неизвестном на столбец свободных членов.

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta}, \dots, \quad x_n = \frac{\Delta x_n}{\Delta}.$$

Пример 19.

Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 3, \\ 5x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 - x_3 = -2. \end{cases}$$

Решение:

Вычислим определитель системы и определители при неизвестных:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-2) \cdot (-1) + 2 \cdot (-2) \cdot 1 + 5 \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot (-2) \cdot 1 - 5 \cdot 2 \cdot (-1) - 1 \cdot (-2) \cdot 3 = 6 - 4 + 5 + 2 + 10 + 6 = 25.$$

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-2) \cdot (-1) + 2 \cdot (-2) \cdot (-2) + 3 \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot (-2) \cdot (-2) - 3 \cdot 2 \cdot (-1) - 1 \cdot (-2) \cdot 3 = 6 + 8 + 3 - 4 + 6 + 6 = 25.$$

$$\Delta x_2 = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 3 \cdot (-1) + 3 \cdot (-2) \cdot 1 + 5 \cdot (-2) \cdot 1 - 1 \cdot 3 \cdot 1 - 5 \cdot 3 \cdot (-1) - (-2) \cdot (-2) \cdot 3 = -9 - 6 - 10 - 3 + 15 - 12 = -25.$$

$$\Delta x_3 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 5 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-2) \cdot (-2) + 2 \cdot 3 \cdot 1 + 5 \cdot 1 \cdot 3 - 3 \cdot (-2) \cdot 1 - 5 \cdot 2 \cdot (-2) - 1 \cdot 3 \cdot 3 = 12 + 6 + 15 + 6 + 20 - 9 = 50.$$

Найдем значения x_1, x_2, x_3 по формулам Крамера:

$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta} = \frac{25}{25} = 1;\quad x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta} = \frac{-25}{25} = -1;\ \ x_3 = \frac{\Delta x_3}{\Delta} = \frac{50}{25} = 2.$

***Ответ:* (1; -1; 2).**

Решение систем линейных уравнений матричным способом:

Так как систему линейных уравнений можно записать в виде матричного уравнения, то эту систему можно решить как матричное уравнение.

Пример20.

Решить матричным способом систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \ = 10, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 \quad = 23, \\ \quad x_2 + 2x_3 = 13. \end{cases}$$

Решение:

Составим матричное уравнение AX=B, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 10 \\ 23 \\ 13 \end{pmatrix}$$

и решим его указанным способом. Находим

D=$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \cdot 0 + 3 \cdot 1 \cdot 0 - 0 \cdot 2 \cdot 0 - 3 \cdot 2 \cdot 2 - 1 \cdot 1 \cdot$
$1 = 4 - 12 - 1 = -9 \neq 0;$

$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 3;$

$A_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -(3 \cdot 2 - 1 \cdot 0) = -6;$

$A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 0 = 3;$

$A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(2 \cdot 2 - 0 \cdot 1) = -4;$

$A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - 0 = 2;$

$A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -(1 \cdot 1 - 2 \cdot 0) = -1;$

$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - 0 \cdot 2 = 2;$

$A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -(1 \cdot 1 - 0 \cdot 3) = -1;$

$A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - 2 \cdot 3 = -4,$

Составим матрицу $\begin{pmatrix} 3 & -6 & 3 \\ -4 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -4 \end{pmatrix}$ и транспонируем её: $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -6 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -4 \end{pmatrix}$

запишем обратную матрицу:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{4}{9} & -\frac{2}{9} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{4}{9} & -\frac{2}{9} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 23 \\ 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}\cdot 10 + \frac{4}{9}\cdot 23 - \frac{2}{9}\cdot 13 \\ \frac{2}{3}\cdot 10 - \frac{2}{9}\cdot 23 + \frac{1}{9}\cdot 13 \\ \frac{1}{3}\cdot 10 + \frac{1}{9}\cdot 23 + \frac{4}{9}\cdot 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Ответ: $\boldsymbol{x_1 = 4}$; $\boldsymbol{x_2 = 3}$; $\boldsymbol{x_3 = 5}$.

План работы:

№1. Решить систему линейных уравнений матричным методом

1 вариант	2 вариант	3 вариант
$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 6 \\ -x_1 - x_2 + 5x_3 = -2 \end{cases}$	$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 + 2x_2 \quad - 3 \end{cases}$	$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 = -6 \\ 2x_1 - x_2 \quad = -3 \\ 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 15 \end{cases}$
4 вариант	5 вариант	6 вариант
$\begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_3 = 4 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 1 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 4 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \\ 3x_2 - 2x_3 = 4 \\ 5x_1 - 4x_2 + 8x_3 = 3 \end{cases}$	$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = -10 \\ 2x_1 \quad + 4x_3 = 12 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_2 = -3 \end{cases}$
7 вариант	8 вариант	9 вариант
$\begin{cases} 5x_1 - x_2 \quad = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 4x_1 \quad + x_3 = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} 5x_2 - x_3 = -19 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 = -6 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$	$\begin{cases} 5x_1 + 8x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_1 - 2x_2 + 6x_3 = -7 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -5 \end{cases}$

№2. Решить систему линейных уравнений методом Крамера.

1 вариант	2 вариант	3 вариант
$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 9 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 3 \\ -x_1 + x_2 - 3x_3 = -14 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - x_3 = 2 \\ -x_1 - x_2 + 8x_3 = 5 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 11 \end{cases}$	$\begin{cases} 7x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 21 \\ x_1 + x_2 - 5x_3 = 13 \\ -2x_1 - 3x_2 - x_3 = -5 \end{cases}$
4вариант	5 вариант	6 вариант

$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 14 \\ -5x_1 + 3x_2 - x_3 - 17 \\ x_1 - 9x_2 + 3x_3 = -47 \end{cases}$	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 27 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 0 \\ 6x_1 - 2x_2 - 4x_3 = 22 \end{cases}$	$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 12 \\ x_1 - x_2 - 5x_3 = 18 \\ 2x_1 - 7x_2 - x_3 = 5 \end{cases}$
7 вариант	8 вариант	9 вариант
$\begin{cases} 5x_1 - x_2 + x_3 = -2 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 8 \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -4 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = -11 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 = 23 \\ 4x_1 + 2x_2 - x_3 = -11 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - x_3 = -9 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ -2x_1 + 4x_2 - 7x_3 = 15 \end{cases}$

Контрольные вопросы:

1) Как решить матричное уравнение?

2) Сформулируйте теорему Крамера.

3)Запишите формулу Крамера.

Литература: [2, с. 84-88]

Список литературы

Основные источники:

1. Богомолов Н.В. Практические занятия по математике: Учебное пособие для средних специальных учебных заведений. – М.: Юрайт, 2019

2. Богомолов Н.В., Самойленко П.Ю. Сборник дидактических заданий по математике: Учеб. пособие для сред. спец. учеб. заведений. – М.: Юрайт, 2019.

3. Дорофеева А.В., Математика: учеб.пос. – М.: Юрайт, 2013.

4. Дадаян А.А., Сборник задач по математике: учеб.пос. – М.: Форум, 2017.

5. Лисичкин В.Т., Соловейчик И.Л. Математика: Учеб. Пособие для техникумов. – М.: Высш. шк., 2018.

Дополнительные источники:

1. Башмаков М.И. Математика: Учебное пособие для СПО. – М.: КноРус, 2019.

2. Виктор Шипачев; под ред. А.Н. Тихонова Математика: учебник и практикум для СПО 8-е изд., перераб. и доп. - М.: Издательство Юрайт, 2016. - 447 с. - (Серия: Профессиональное образование)

Математика: учебник для СПО/ О.В. Татарников [и др.]; под общ. ред. О. В. Татарникова. - М.: Издательство Юрайт, 2016. - 450 с. - (Серия: Профессиональное образование).