Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Заполярный государственный университет им. Н.М. Федоровского»
Политехнический колледж

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
ПО ПРАКТИЧЕСКИМ РАБОТАМ
учебной дисциплины
«МАТЕМАТИКА»

2 КУРС

для специальности
40.02.01 Право и организация социального обеспечения
(углубленная подготовка)

2025

Методические указания по практическим работам учебной дисциплины «Математика» разработана на основе Федерального государственного образовательного стандарта по специальностям среднего профессионального образования 40.02.01 Право и организация социального обеспечения (углубленная подготовка).

Организация-разработчик: Политехнический колледж ФГБОУ ВО «Заполярный государственный университет им. Н.М. Федоровского» Политехнический колледж

Разработчик:
Олейник Марина Васильевна, преподаватель

Рассмотрена на заседании предметной комиссии естественнонаучных дисциплин

Председатель комиссии ____________________ М.В. Олейник

Утверждена методическим советом Политехнического колледжа ФГБОУ ВО «Норильский государственный индустриальный институт».

Протокол заседания методического совета № 3 от «22» 01 2025 г.

Зам. Директора по УР ____________________ А.В. Петухова

СОДЕРЖАНИЕ

Требования к оформлению практических работ

После изучения соответствующей темы студенты выполняют практическую работу. Содержание практических работ полностью соответствует рабочей программе по математике.

К выполнению практической работы можно приступать только после изучения соответствующей темы и получения навыков решения задач. Предусмотренные задания носят репродуктивный, частично-поисковый и поисковый характер. Все задачи и расчеты обязательно должны быть доведены до окончательного числового результата. Вариант практической работы определяется по последней цифре порядкового номера списочного состава в журнале учебных занятий.

Все практические работы, сдаваемые учащимися на проверку, должны быть выполнены в обычной тетради в клетку (96 листов). Образец оформления титульного листа приведен в прил. 1.

При выполнении практической работы студентам рекомендуется:

- использовать учебные пособия, справочники;
- проводить несложные дедуктивные рассуждения;
- обосновывать шаги решения задач;
- формулировать определения математических понятий;
- пользоваться математической терминологией и символикой;
- письменно оформлять решения задач;
- пользоваться калькулятором;
- самостоятельно изучать учебный материал.

Все представленные варианты практических работ даны одинаковой степени трудности.

Практическая работа выполняется в сроки, установленные в соответствии с календарно-тематическим планом. За каждую практическую работу студент должен получить положительную оценку.

Итоговой формой изучения дисциплины является экзамен для всех специальностей. Студенты, не выполнившие все практические работы, не аттестуются и к экзамену не допускаются.

Помните, что «царского пути» в математике нет и дорогу осилит только упорно идущий! Но, с другой стороны, не так страшна математика, как ее малюют. Искренне желаю успехов!

Практическое занятие № 1 и 2
Действия над комплексными числами

Цель работы:
студент должен:
знать:
- алгебраическую форму комплексного числа;
- тригонометрическую форму комплексного числа;

уметь:
- выполнять действия над комплексными числами, представленными в различных формах.

Сведения из теории:
Алгебраическая форма комплексного числа

Обозначим $\sqrt{-1} = i$ и назовём мнимой единицей, ($i^2 = -1$). Тогда число вида $z = a + bi$, где a и b - любые действительные числа, назовём комплексным числом.

Здесь a - называют действительной частью комплексного числа, bi - называют мнимой частью, b - коэффициентом мнимой части комплексного числа.

Действия над комплексными числами, представленными в алгебраической форме

Пусть даны два числа $z_1 = a_1 + b_1 i$, и $z_2 = a_2 + b_2 i$.

Для этих чисел понятия равенство и действия сложения, умножения определены следующим образом:

1) Два комплексных числа называются равными, если равны их действительная и мнимая части, т. е. $a_1=a_2$, $b_1=b_2$.

2) Суммой двух комплексных чисел z_1 и z_2 называется комплексное число $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$.

3) Произведением двух комплексных чисел z_1 и z_2 называется комплексное число $z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i$.

4) Модулем комплексного числа называется длина вектора соответствующего этому комплексному числу на плоскости и вычисляется по формуле: $|\vec{z}| = r = \sqrt{a^2 + b^2}$.

5) Аргументом комплексного числа называется угол, образованный вектором с положительным направлением действительной оси и вычисляется по формуле: $\arg z = \arg(a + bi) = \phi + 2\pi k$. Т. о. для каждого комплексного числа можно указать бесконечное множество аргументов.

Для нахождения аргумента необходимо:

1. Определить в какой координатной четверти находится комплексное число.
2. Найти в этой четверти угол решив уравнение:

$$tg\phi = \frac{b}{a};\ \ \phi = arctg\ \frac{b}{a} = \phi + \pi k,\ \ k \in Z\ .$$

Пример 7.

Решите квадратное уравнение: $x^2 - 6x + 13 = 0$.

Решение:

вычислим корни квадратного уравнения через дискриминант:

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 13}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 52}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{16 \cdot (-1)}}{2} = \frac{6 \pm 4i}{2}.$$

$$x_1 = \frac{6 \pm 4i}{2} = \frac{2(3 + 2i)}{2} = 3 + 2i;\ \ x_2 = 3 - 2i.$$

Получена пара взаимно - сопряжённых комплексных чисел $3 \pm 2i$, где $a = 3; b = 2$.

Заметим, что всякое алгебраическое уравнение степени *n* имеет ровно *n* корней, среди которых могут быть как действительные (различные или равные), так и комплексные (обязательно попарно взаимно – сопряжённые) корни.

Тригонометрическая форма комплексного числа

Запись комплексного числа в виде $a + bi = r(\cos\ \phi + i \sin\ \phi)$ называется тригонометрической формой комплексного числа.

Действия над комплексными числами, представленными в тригонометрической форме

Над комплексными числами в тригонометрической форме выполняются действия умножения, деления, возведения в степень и извлечение корня *n*-ой степени.

Пусть даны два числа $z_1 = r_1(\cos\ \phi_1 + i \sin\ \phi_1)$ и $z_2 = r_2(\cos\ \phi_2 + i \sin\ \phi_2)$, тогда:

1) Произведением комплексных чисел называется комплексное число, которое вычисляется по формуле: $z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\ \phi_1 + \phi_2) + i \sin(\ \phi_1 + \phi_2))$.

2) Частным комплексных чисел называется комплексное число, которое вычисляется по формуле: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\ \phi_1 - \phi_2) + i \sin(\ \phi_1 - \phi_2))$.

3) Для возведения в степень: $z^n = r^n(\cos(\ n\phi) + i \sin(\ n\phi))$.

Пример 8.

Упростите: $\frac{1 + 2i^5}{1 + 3i^{21}}$.

Решение:

упростим дробь (понизим степень числителя и знаменателя), используя ($i^2 = -1$):

$$i^5 = i^4 i^1 = (i^2)^2 i = (-1)^2 i = i;$$
$$i^{21} = i^{20} i^1 = (i^2)^{10} i = (-1)^{10} i = i\ .$$

Подставим полученные выражения в исходную дробь и преобразуем её:

$$\frac{1+2i^5}{1+3i^{21}}=\frac{1+2i}{1+3i}=\frac{(1+2i)(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)}=\frac{1-3i+2i-6i^2}{1-9}=\frac{1-i+6}{-8}=\frac{7-i}{-8}=\frac{i-7}{8}.$$

Пример 9.

Вычислите: $(\sqrt{2}(\cos 10^0+i\sin 10^0))^2\cdot 2(\cos 40^0+i\sin 40^0)$.

Решение:

для первого комплексного числа используем формулу возведения в степень, а затем воспользуемся формулой произведения комплексных чисел:

$$2(\cos 20^0+i\sin 20^0)\cdot 2(\cos 40^0+i\sin 40^0)=4(\cos 60^0+i\sin 60^0)=4(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})=2+2\sqrt{3}i.$$

Для извлечения корня n-й степени из комплексного числа $r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ используется формула:

$$z_k=\sqrt[n]{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right),$$

где $\sqrt[n]{r}$ - арифметический корень, $k=0,1,2,...,n-1$.

Пример 10.

Решите уравнение: $x^2-2x+10=0$.

Решение:

для решения воспользуемся обычными формулами вычисления корней квадратных уравнений:

$$a=1,\ b=-2,\ c=10,$$

$$D=b^2-4ac=(-2)^2-4\cdot1\cdot10=4-40=-36.$$

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}=\frac{2\pm\sqrt{-36}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{36\cdot(-1)}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{36\cdot i^2}}{2}=\frac{2\pm 6i}{2}=\frac{2(1\pm 3i)}{2}=1\pm 3i.$$

Получили пару комплексных взаимно сопряженных корней.

Задания для самостоятельного решения:

1 вариант	**2 вариант**
№1. Выполните действия, вычислите аргумент и модуль комплексного числа: 1) $\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^2$; 2) $4+(1+i)^3-(1-i)^3$;	№1. Выполните действия, вычислите аргумент и модуль комплексного числа: 1) $\frac{1+2i^{15}}{1+3i^{21}}$; 2) $(1-i)^{10}$; 3) $\frac{4\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)}{1-i^2}$.

3) $\dfrac{(2+3i)^2}{\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)}$. №2. Решите уравнение: x^2-6x+13=0.	№2. Решите уравнение: x^2+3x+4=0.
4 вариант №1. Выполните действия, вычислите аргумент и модуль комплексного числа: 1) $\dfrac{1-2i^{23}}{1-3i}$; 2) $5+(2+i)^2-(1-i)^3$; 3) $\dfrac{2\left(\cos 40^{0}+i\sin 40^{0}\right)}{\left(\sqrt{3}(\cos 10^{0}+i\sin 10^{0})\right)}$. №2. Решите уравнение: x^2-4x+16=0.	**3 вариант** №1. Выполните действия, вычислите аргумент и модуль комплексного числа: 1) $\dfrac{3+3i}{1+i^{15}}$; 2) $4+(1+i)^3-(1-i)^3$; 3) $4\left(\cos 10^{0}+i\sin 10^{0}\right)\cdot\dfrac{1}{2}\left(\cos 20^{0}+i\sin 20^{0}\right)$. №2. Решите уравнение: 9x^2+12x+29=0.
5 вариант №1. Выполните действия, вычислите аргумент и модуль комплексного числа: 1) $\dfrac{1+2i^{11}}{1-3i^{23}}$; 2) $\dfrac{-\sqrt{2}+i^{45}}{i+i^{24}}$; 3) $\dfrac{4\left(\cos 360^{0}+i\sin 360^{0}\right)}{2\left(\cos 60^{0}+i\sin 60^{0}\right)}$. №2. Решите уравнение: 2,5x^2+x+1=0.	**6 вариант** №1. Выполните действия, вычислите аргумент и модуль комплексного числа: 1) $\dfrac{1+2i}{i^9}$; 2) $\dfrac{\left(1-i^3\right)(2+i)}{3-i^{13}}$; 3) $3\left(\cos\pi+i\sin\pi\right)\cdot 2(\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2})$. №2. Решите уравнение: x^2-2x+4=0.
7 вариант №1. Выполните действия, вычислите аргумент и модуль комплексного числа: 1) $2+3i+(1-i)^3$; 2) $(1+i)^{10}$; 3) $\dfrac{2\left(\cos\dfrac{3\pi}{2}+i\sin\dfrac{3\pi}{2}\right)}{i^{24}-i^2}$. №2. Решите уравнение: x^2-4x+13=0.	**8 вариант** №1. Выполните действия, вычислите аргумент и модуль комплексного числа: 1) $\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i^{14}}$; 2) $\dfrac{1-i}{2i^{19}}$; 3) $\dfrac{(1-2i)^2}{2\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)}$. №2. Решите уравнение: 4x^2-20x+26=0.
9 вариант	

№1. Выполните действия, вычислите аргумент и модуль комплексного числа:

1) $\frac{1+2i}{i^{17}}$; 2) $\frac{1-i\sqrt{2}}{1-i^{12}}$; 3) $\sqrt{2}\left(\cos 120^0 + i\sin 120^0\right)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos 60^0 + i\sin 60^0\right)$.

№2. Решите уравнение:

x^2-2x+26=0.

Контрольные вопросы:

1. Дайте определение алгебраической форме комплексного числа.
2. Перечислите действия над комплексными числами, представленными в алгебраической форме.
3. Дайте определение тригонометрической форме комплексного числа.
4. Перечислите действия над комплексными числами, представленными в тригонометрической форме.

Практическая работа №3 «Операции над множествами».

Цель работы:

уметь:

находить пересечение, объединение, разность множеств;

находить элементы множества.

Необходимые для выполнения работы знания:

студент должен:

знать:

определение множества;

элементы множества и их обозначения.

Сведения из теории:

Множества обозначают большими латинскими буквами, например, A, B, C, D,... и. д.

Объекты, из которых состоит множество, называются его элементами. Их обозначают маленькими латинскими буквами: a, b, c, d,... и. д.

Если множество состоит из элементов a, b, c, n, то записывают: A=$\{a,b,c,n\}$.

Множество, которое не содержит ни одного элемента, называется пустым и обозначается символом $\emptyset$.

Множество, состоящее из чисел, называют числовыми.

N-Множество натуральных чисел,

Z - Множество целых чисел,

Q - Множество рациональных чисел,

R - Множество действительных чисел.

Между двумя множествами существует пять видов отношений. Если множества A и B не имеют общих элементов, эти множества не пересекаются и записывают так: A∩B=$\emptyset$.

Например, A = $\{1,2,5,7\}$ и B = $\{3,4.8,9\}$, общих элементов у этих множеств нет, поэтому множества не пересекаются.

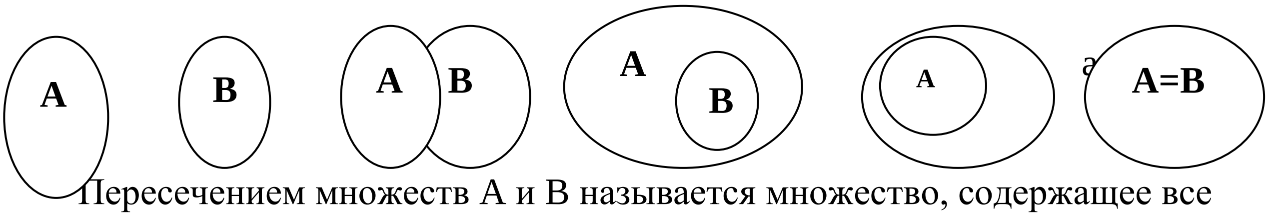
Если множества A и B имеют общие элементы, то эти множества пересекаются и записывают: $A \cap B \neq \emptyset$.

Например, $A = \{1, 2, 5, 7, 8\}$ и $B = \{3, 5, 7, 9\}$ пересекаются, т. к. у них есть общие элементы 5, 7.

Множество B является подмножеством A, если каждый элемент множества B является также элементом множества A.

Если множества состоят из одних и тех же элементов, то они называются равными.

Существует пять случаев отношений между двумя множествами.



Пересечением множеств A и B называется множество, содержащее все элементы, которые принадлежат множеству A и множеству B. Обозначают: $A \cap B$.

Объединением множеств A и B называется множество, содержащее все элементы, которые принадлежат множеству A или множеству B. Обозначают: $A \cap B$.

Пример 13.

Пусть A - множество чисел, кратных 2, а B - множество, чисел, кратных 3. $A = \{2, 4, 6, 8,10,12,14,16\}$ $B = \{3, 6, 9, 12, 15\}$. Найти пересечение и объединение множеств A и B.

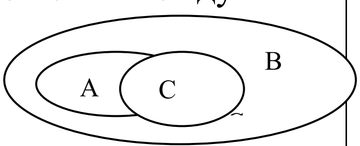
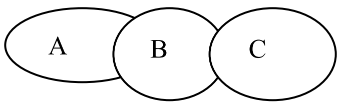
$A \cap B = \{6, 12\}$

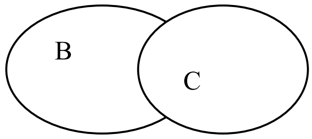
$A \cup B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 3, 9, 15\}$

Разностью множеств A и Вназывается множество, содержащее те и только те элементы, которые принадлежат множеству A, и не принадлежат множеству B. Обозначают $A \backslash B$.

Например, если $A = \{a, b, c, d, l, m\}$ и $B = \{a, b, c\}$, то $A \backslash B = \{d, l, m\}$.

План работы:

1 вариант 1) Приведите примеры множеств A, B, C, если отношения между ними  таковы: 2)Образуйте все подмножества множества в слове "крот". Сколько подмножеств	2 вариант 1) Приведите примеры множеств A, B, C, если отношения между ними  таковы: 2) Даны множества $A = \{a, b, c, d, e, f, k\}$ и $B = \{a, c, e, k,\ m,\ p\}$. Найдите $A \cup B, A \cap B,$	3 вариант 1) Приведите примеры множеств A, B, C, если между ними  таковы: 2) Известно, что A - множество спортсменов

получилось?	$A/B,$	группы, B - множество отличников группы. Сформулируйте условия, при которых $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \emptyset$
4 вариант 1) Приведите примеры множеств A, B, C, если отношения между ними таковы: $A \cap B = 5$, $A\backslash B = 2$. 2) Известно, что А-множество спортсменов группы, В - множество отличников группы. Сформулируйте условия, при которых $\mathrm{A} \cup \mathrm{B} = \mathrm{A}$.	**5 вариант** 1) Приведите примеры множеств A, B, C, если отношения между ними таковы: $A \cap B = \{a, b, c, k, e\}$, $A\backslash B = 2$. 2) Известно, что А - множество целых чисел, В - множество натуральных чисел. Сформулируйте условия, при которых $A \cup B = A$.	**6 вариант** 1) Приведите примеры множеств A, B, C, если отношения между ними  таковы: 2) Известно, что А - множество животных, В - множество домашних животных. Сформулируйте условия, при которых $A \cap B = \emptyset$

Контрольные вопросы:
1) Дайте определение множества.
2) Перечислите виды отношений и приведите примеры.

Практическая работа № 4 «Закон распределения дискретной случайной величины. Формула Бернулли»

Цель работы:

студент должен:

знать:

- определение дискретной случайной величины;

уметь:

- строить многоугольник (полигон) распределения дискретной случайной величины;
- составлять закон распределения дискретной случайной величины.

Сведения из теории:

Случайное событие может состоять, в частности, в появлении некоторого числа, значение которого не может быть однозначно определено условиями его возникновение. Такие события называют случайными величинами. В этой трактовке мы сохраняем классический подход к понятию случайного события. Однако требование корректности в построении математических теорий заставляет нас вновь обратиться к аксиоматическому подходу, сохранив классические модели в качестве наглядных образцов из сферы практических приложений.

Математически корректно определить случайную величину как числовую функцию, заданную в пространстве элементарных событий.

Предположим вначале, что пространство элементарных событий является конечным множеством. Соответствующую ему случайную величину называют дискретной: она может принимать лишь конечное число значений, каждому из которых может быть сопоставлена вероятность его появления в опыте. Поэтому дискретные случайные величины можно задать таблицей вида:

X	x_1	x_2	…	x_n
P	p_1	p_2	…	p_n

Здесь буквой X обозначена случайная величина, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – перечень всех ее возможных значений, а $p_1, \ldots, p_n$ – соответствующие им вероятности. Такую таблицу называют законом распределения дискретной случайной величины.

События X=x_i, (i=1, 2, ,3, …, n) являются несовместными и единственно возможными, т. е. они образуют полную систему событий. Поэтому сумма их вероятностей равна единице: $p_1+p_2+p_3+\ldots+p_n=1$.

Пример 110.

Разыгрываются две вещи стоимостью по 5 руб. и одна вещь стоимостью 30 руб. Составить закон распределения выигрышей для человека, купившего один билет из 50.

Решение:

искомая случайная величина X представляет собой выигрыш и может принимать значения: 0, 5, 30 руб. Первому результату благоприятствует 47 случаев, второму результату – 2 случая и третьему – 1 случай. Найдем их вероятности:

$$P(x_1)=47/50=0{,}94;$$
$$P(x_2)=2/50=0{,}04;$$
$$P(x_3)=1/50=0{,}02.$$

Тогда закон распределения случайной величины имеет вид:

X_i	0	5	30
p_i	0,94	0,04	0,02

В качестве проверки найдем $p_1+p_2+p_3=0{,}94+0{,}04+0{,}02=1$.

Задания для самостоятельного решения:

1 вариант

1) Построить многоугольник (полигон) распределения дискретной случайной величины *X*, заданной законом распределения:

X	2	4	5	6
p	0,3	0,1	0,2	0,4

2) Стрелок делает по мишени три выстрела. Вероятность попадания в мишень при каждом выстреле равна 0,3. Построить ряд распределения числа попаданий.

2 вариант

1) Построить многоугольник (полигон) распределения дискретной случайной величины *X*, заданной законом распределения:

X	10	15	20
p	0,1	0,7	0,2

2) Составить таблицу распределения вероятностей случайного числа очков, выпавшего на верхней грани игрального кубика при одном подбрасывании.

3 вариант

1) Построить многоугольник (полигон) распределения дискретной случайной величины *X*, заданной законом распределения:

X	10	20	30	40
p	0,3	0,1	0,2	0,4

2) Игральную кость бросают дважды. Случайная величина X – сумма очков при обоих подбрасываниях. Составить таблицу распределения вероятностей.

4 вариант

1) Построить многоугольник (полигон) распределения дискретной случайной величины *X*, заданной законом распределения:

X	5	10	15	20
p	0,1	0,3	0,2	0,4

2) В коробке находятся 7 карандашей, из которых 4 – красные. Наудачу берут три карандаша. Какой закон распределения имеет случайная величина, означающая число извлеченных красных карандашей?

5 вариант

1) Построить многоугольник (полигон) распределения дискретной случайной величины *X*, заданной законом распределения:

X	*2*	4	5	6
p	0,1	0,2	0,5	0,2

2) Составить таблицу распределения вероятностей случайного числа очков, выпавшего на верхней грани игрального кубика при одном подбрасывании.

6 вариант

1) Построить многоугольник (полигон) распределения дискретной случайной величины *X*, заданной законом распределения:

X	1	2	3	4
p	0,2	0,4	0,1	0,3

2) Стрелок делает по мишени два выстрела. Вероятность попадания в мишень при каждом выстреле равна 0,3. Построить ряд распределения числа попаданий.

7 вариант

1) Построить многоугольник (полигон) распределения

8 вариант

1) Построить многоугольник (полигон) распределения

<table>
<tr>
<td>дискретной случайной величины X, заданной законом распределения:
<table>
<tr><td>X</td><td>1</td><td>4</td><td>7</td><td>10</td></tr>
<tr><td>p</td><td>0,3</td><td>0,4</td><td>0,2</td><td>0,1</td></tr>
</table>
2) В коробке находятся 9 карандашей, из которых 4 – синие. Наудачу берут три карандаша. Какой закон распределения имеет случайная величина, означающая число извлеченных синих карандашей?</td>
<td>дискретной случайной величины X, заданной законом распределения:
<table>
<tr><td>X</td><td>10</td><td>30</td><td>5</td></tr>
<tr><td>p</td><td>0,3</td><td>0,5</td><td>0,2</td></tr>
</table>
2) Игральную кость бросают трижды. Случайная величина X – сумма очков при трех подбрасываниях. Составить таблицу распределения вероятностей.</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">9 вариант
1) Построить многоугольник (полигон) распределения дискретной случайной величины X, заданной законом распределения:
<table>
<tr><td>X</td><td>2</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr>
<tr><td>p</td><td>0,3</td><td>0,1</td><td>0,2</td><td>0,4</td></tr>
</table>
2) Стрелок делает по мишени четыре выстрела. Вероятность попадания в мишень при каждом выстреле равна 0,2. Построить ряд распределения числа попаданий.</td>
</tr>
</table>

Контрольные вопросы:

1. Дайте определение случайного события.
2. Что называется случайной величиной?
3. Поясните закон распределения дискретной случайной величины.

Практическая работа №5 «Математическое ожидание, дисперсия и квадратичное отклонение дискретной случайной величины»

Цель работы:

уметь:

- вычислять математическое ожидание, дисперсию дискретной случайной величины.

Необходимые для выполнения работы знания:

студент должен:

знать:

- формулы для вычисления математического ожидания, дисперсии дискретной случайной величины.

Сведения из теории:

Определение:

Математическим ожиданием дискретной случайной величины называется сумма произведений возможных ее значений на соответствующие вероятности и обозначается $M(X)$:

$$M(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \dots + x_np_n.$$

Пример 24.

Найти математическое ожидание числа очков, выпадающих при бросании игральной кости.

Решение:

Случайная величина X числа очков принимает значения 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Составим закон ее распределения:

Значения x_i	1	2	3	4	5	6
Вероятности p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Тогда $M(X) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = 3{,}5$

Дисперсией $D(X)$случайной величины X называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания:

$$D(X) = M(x - m)^2.$$

$x - m$ называют отклонением величины от математического ожидания.

Пример 25.

Пусть $X -$ число очков, выпадающих при одном бросании игральной кости. Найти дисперсию случайной величины:

Решение:

Закон распределения случайной величины X и ее математическое ожидание $M(X) = 3{,}5$ были найдены в предыдущей задаче.

Найдем отклонения для $x_1, x_2, \dots, x_6$:

Задания для самостоятельного решения:

1)Право на выстрел в тире стоит 15 рублей. При попадании в мишень№1 получаете приз в 50 рублей, при попадании в мишень №2 - 20 рублей. В какую мишень выгодно стрелять, если вероятность попадания в мишени для вас соответственно равны 0,2 и 0,4? Найти математическое ожидание и дисперсия случайной величины.

2) Монету подбрасывают 5 раз. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины.

3) Правильная треугольная пирамида имеет пронумерованные грани 1, 2, 3, 4. Запишите закон распределения для выпадения номера грани, на которой стоит пирамида. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины.

Контрольные вопросы:

1) Что называется дисперсией случайной величины?

2) Что называется математическим ожиданием дискретной случайной величины?

3) Что называется законом распределения случайной величины?

Практическая работа №6 « Элементы комбинаторики. Перестановки, размещения, сочетания»

Цель работы:

студент должен:

знать:

- определение соединений, их видов;
- определение вероятности;
- теоремы сложения, умножения вероятностей;

уметь:

- по условию задачи различать виды соединений;
- вычислять разные виды соединений;
- вычислять вероятность событий.

Сведения из теории:

Соединения, их виды

Группы, составленные из каких – либо элементов, называются *соединениями*.

Различаю три основных вида соединений: *размещения, перестановки и сочетания*.

Размещениями из n элементов по m в каждом называются такие соединения, которые отличаются друг от друга либо самими элементами, либо порядком их расположения.

Число размещений из n элементов по m обозначается и вычисляется по формуле:

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)...[n-(m-1)].$$

Перестановками из n элементов называются такие соединения из всех n элементов, которые отличаются друг от друга порядком расположения элементов.

Перестановки представляют частный случай размещений из n элементов по n в каждом.

Число всех перестановок из n элементов равно произведению последовательных чисел от 1 до n включительно:

$$P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot (n-1)n,$$

$n!$-читается «n-факториал», причем 0!=1 и 1!=1.

Используя приведенные выше определения имеем формулы:

$$A_n^m = \frac{P_n}{P_{n-m}} = \frac{n!}{(n-m)!},$$

при решении задач часто используется равенство:

$$A_n^{m+1} = (n-m)A_n^m.$$

Сочетаниями из n элементов по m в каждом называются такие соединения, которые отличаются друг от друга хотя бы одним элементом.

Число сочетаний из n элементов по m обозначается и вычисляется по формуле:

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_n^m},$$

которую можно записать также в виде

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

или

$$C_n^m = \frac{n(n-1)\ldots[n-(m-1)]}{m!}.$$

Кроме того, при решении задач используются следующие формулы, выражающие основные свойства сочетаний:

$$C_n^m = C_n^{n-m} \ (0 \le m \le n), \quad C_n^n = 1; \quad C_n^0 = 1; \quad C_n^m + C_n^{m+1} = C_{n+1}^{m+1}$$

Пример 94.

Найти число размещений из 10 элементов по 4.

Решение:

по формуле $A_n^m = n(n-1)(n-2)\ldots[n-(m-1)]$:

$$A_{10}^4 = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040.$$

Пример 95.

Решить уравнение: $A_n^5 = 30\,A_{n-2}^4$.

Решение:

используя формулу для вычисления числа размещений имеем:

$$n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4) = 30\,(n-2)(n-3)(n-4)(n-5).$$

Разделим обе части на одинаковые выражения, получим:

$$n(n-1) = 30\,(n-5),$$

и решим получившееся квадратное уравнение: $n_1 = 6, \ n_2 = 25$.

Пример 96.

Решите систему: $\begin{cases} C_x^y = C_x^{y+2} \\ C_x^2 = 66 \end{cases}$.

Решение:

решим второе уравнение:

$$C_x^2 = 66 \Rightarrow \frac{x(x-1)}{1 \cdot 2} = 66;$$

$$x^2 - x - 132 = 0;$$

$$x_1 = -11, \ x_2 = 12.$$

Т. к. $x > 2$, то –11 не удовлетворяет условию задачи. Подставив x=12 в первое уравнение системы, получим

$$C_{12}^{y} = C_{12}^{y+2}.$$

Используя основное свойство сочетаний, имеем:

$$C_{12}^{y} = C_{12}^{12-y},$$

тогда

$$C_{12}^{12-y} = C_{12}^{y+2} \Rightarrow 12 - y = y + 2 \Rightarrow y = 5.$$

Ответ: x=12, y=5.

Пример 97.

Сколькими способами из восьми кандидатов можно выбрать три лица на три должности?

Решение:

условию задачи соответствуют размещения 3 из 8, имеем:

$$A_8^3 = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336.$$

Случайные события

Изучение каждого явления в порядке наблюдения или производства опыта связано с осуществлением некоторого комплекса условий (испытаний). Всякий результат или исход испытания называется *событием*.

Если событие при заданных условиях может произойти или не произойти, то оно называется *случайным*.

В том случае, когда событие должно непременно произойти, его называют *достоверным*, а в том случае, когда оно заведомо не может произойти, *невозможным*.

События называются *несовместными*, если каждый раз возможно появление только одного из них. События называются *совместными*, если в данных условиях появление одного из этих событий не исключает появление другого при том же испытании.

События называются *противоположными*, если в условиях испытания они, являясь единственными его исходами, несовместны.

Вероятность события рассматривается как мера объективной возможности появления случайного события.

Классическое определение вероятности.

Вероятностью события A называется отношение числа благоприятных исходов m, к числу всех возможных исходов n:

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

Вероятность любого события не может быть меньше нуля и больше единицы, т. е. $0 \le P(A) \le 1$.

Невозможному событию соответствует вероятность $P(A)$=0, а достоверному – вероятность $P(A)$=1.

Пример 98.

В лотерее из 1000 билетов 200 выигрышных. Вынимают наугад один билет. Какова вероятность, что этот билет выигрышный?

Решение:

количество благоприятных событий, удовлетворяющих условию задачи m=200.

Число всех возможных вариантов n=1000.

По определению вероятности: $P(A)$=200/1000=0,2.

Пример 99.

Из урны, в которой находятся 5 белых и 3 черных шара, вынимают один шар. Найти вероятность того, что этот шар черный?

Решение:

общее число шаров m=8, из них черных n=3, по определению: $P(A)$=3/8=0,375.

Пример 100.

Из урны, в которой находятся 12 белых и 8 черных шара, вынимают наудачу два шара. Найти вероятность того, что оба шара окажутся черными?

Решение:

общее число возможных случаев n равно числу сочетаний из 20 (12+8) элементов по два:

$$n = C_{20}^{2} = \frac{20 \cdot 19}{1 \cdot 2} = 190;$$

число благоприятных исходов m равно числу сочетаний из 8 элементов по два:

$$n = C_{8}^{2} = \frac{8 \cdot 7}{1 \cdot 2} = 28.$$

По определению: $P(A)$=28/190=0,147.

Пример 101.

В партии из 18 деталей находятся 4 бракованных. Наугад выбирают 5 деталей. Какова вероятность того, что из этих 5 деталей две окажутся бракованными?

Решение:

число всех равновозможных независимых исходов n равно числу сочетаний из 18 по 5:

$$n = C_{18}^{5} = \frac{18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 8568.$$

Подсчитаем число благоприятных исходов m. Среди 5 взятых наугад деталей должно быть 3 качественных и 2 бракованных. Число способов выборки двух бракованных деталей из 4 имеющихся бракованных равно числу сочетаний из 4 по 2:

$$C_4^2 = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 6.$$

Число способов выборки трех качественных деталей из 14 имеющихся равно числу сочетаний из 14 по 3:

$$C_{14}^3 = \frac{14 \cdot 13 \cdot 12}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 364.$$

Любая группа качественных деталей может комбинироваться с любой группой бракованных, поэтому общее число комбинаций m равно:

$$m = C_4^2 \cdot C_{14}^3 = 6 \cdot 364 = 2184,$$

по определению: $P(A)$=2184/8568=0,255.

Задания для самостоятельного решения:

Решить следующие задачи, используя определение сочетаний, их видов:

1 вариант 1) Сколько двузначных чисел можно составить из цифр 1, 3, 5, 8, 9 так, чтобы в каждом числе не было одинаковых цифр? 2) Из 6 открыток надо выбрать 3. Сколькими способами это можно сделать? 3) Решите уравнение: $A_x^3 = \frac{1}{20} A_x^4$.	**2 вариант** 1) Сколькими способами могут разместиться 5 человек вокруг круглого стола? 2) Сколькими способами можно составить флаг, состоящий из трех горизонтальных полос различных цветов, если имеется материал семи различных цветов? 3) Решите уравнение: $30x = A_x^3$.
3 вариант 1) Из 10 кандидатов нужно выбрать 3 человека на конференцию. Сколькими различными способами это можно сделать? 2) Сколько различных пятизначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 3, 5, 7 так, чтобы в каждом числе не было одинаковых цифр? 3) Решите уравнение: $30 A_{x-2}^4 = A_x^5$.	**4 вариант** 1) Бригадир должен отправить на работу бригаду из 3 человек. Сколько таких бригад можно составить из 8 человек? 2) На собрании должны выступить 5 человек (*А, Б, В, Г, Д*). Сколькими способами их можно разместить в списке выступающих, если *А* должен выступать первым? 3) Решите уравнение: $20 A_{x-2}^3 = A_x^5$.
5 вариант 1) Сколькими способами можно расставить на полке 6 книг? 2) Сколькими способами можно выбрать гласную и согласную буквы из слова «журнал»?	**6 вариант** 1) Сколькими способами можно составить список из 6 человек? 2) Сколькими способами собрание, состоящее из 18 человек, может из своего состава выбрать председателя собрания и секретаря?

3) Решите уравнение: $\frac{x}{A_x^3} = \frac{1}{12}$.	3) Решите уравнение: $4C_{x+2}^{x-1} = A_x^3$.
7 вариант 1) Среди перестановок из цифр 1, 2, 3, 4, 5 сколько таких, которые не начинаются цифрами 3 или 5? 2) Из города А в город В ведут 6 дорог, а из города В в город С –3 дороги. Сколькими способами можно попасть из города А в город С? 3) Решите систему: $\begin{cases} A_x^y = 9A_x^{y-1} \\ 2C_x^y = 3C_x^{y-1} \end{cases}$.	**8 вариант** 1) В шахматном турнире принимали участие 15 шахматистов, причем каждый из них сыграл только одну партию с каждым из остальных. Сколько всего партий сыграно в этом турнире? 2) Имеется 8 пар перчаток различных размеров. Сколькими способами можно выбрать из них одну перчатку на левую руку и одну перчатку на правую руку так, чтобы эти перчатки были разных размеров? 3) Решите систему: $\begin{cases} C_x^y = C_x^{y+2} \\ C_x^2 = 153 \end{cases}$.
9 вариант 1) Группа учащихся изучает семь учебных дисциплин. сколькими способами можно составить расписание занятий на понедельник, если в этот учебный день должно быть четыре различных урока? 2) Сколько матчей будет сыграно в футбольном чемпионате с участием 16 команд, если каждые две команды встречаются между собой один раз? 3) Вычислить: $\frac{A_{19}^5 + A_{20}^6}{A_{18}^4}$.	

Контрольные вопросы:

1. Дайте определение соединения, их виды?
2. Приведите формулы для вычисления разных видов соединений.
3. Дайте определение случайного события, их виды. Приведите примеры.
4. Дайте классическое определение вероятности.

Практическая работа №7 «Решение простейших задач теории вероятностей»

Цель работы:

уметь:

- применять определение вероятности при решении задач;
- решать задачи теории вероятности.

Необходимые для работы знания:

Студент должен:

знать:

- формулы вероятности;
- элементы комбинаторики и их формулы;
-теоремы сложения и умножения теории вероятностей.

Сведения из теории:

Классическое определение вероятности:

Вероятность события А равна отношению числа благоприятствующих исходов к общему числу возможных исходов:

$$P(A) = \frac{m}{n},$$

где m - число благоприятствующих событию A исходов;
n- общее число возможных исходов.

Пример 15.

Найти вероятность того, что выпадет четное число очков при бросании игральной кости.

Решение:

Всего возможных исходов: n= 6;
благоприятствующие исходы - четное число - 2, 4, 6: m= 3.
$P(A)=\frac{m}{n} = \frac{3}{6} = 0{,}5$

Ответ: 0,5

Вероятность любого события не может быть меньше нуля и больше единицы, т.е. 0≤P (A)≤1.

Невозможному событию соответствует вероятность P(A)=0, а достоверному - вероятность P(A)=1.

Вероятность несовместимых событий

Вероятность появления одного из нескольких попарно несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий: P(A+B)=P(A)+P(B)

Элементы комбинаторики: перестановки, размещения, сочетания.

Комбинации из n элементов, которые отличаются друг от друга только порядком элементов, называются перестановками.

$$P_n = n!$$
$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1)n$$

Пример 16.

Сколько различных пятизначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4,5 при условии, что ни одна цифра в числе не повторяется?

Решение:

Всего элементов пять, числа можно составить, переставляя данные цифры.
Следовательно, $P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$.

Ответ: **120.**

Комбинации из m элементов по n элементов, которые отличаются друг от друга или самими элементами или порядком элементов, называются *размещениями.*

$$A_m^n = \underbrace{m(m-1)(m-2)\ldots}_{n \quad \text{множителей}},$$

Пример 17.

Сколько двузначных чисел можно составить из пяти цифр 1, 2, 3, 4, 5 при условии, что ни одна из них не повторяется?

Решение:

Так как двузначные числа отличаются друг от друга или самими цифрами, или их порядком, то искомое количество равно числу размещений из пяти элементов по два:

$A_5^2 = 5 \cdot 4 = 20$.

Ответ: 20.

Сочетаниями называются все возможные комбинации из m элементов по n, которые отличаются друг от друга по крайней мере хотя бы одним элементом.
Вычисляется по формуле:

$$C_m^n = \frac{m!}{(m-n)!\,n!}$$

$$C_m^n = \frac{A_m^n}{P_n}.$$

Основное свойство числа сочетаний:

$$C_m^n = C_m^{m-n}.$$

Пример 18.

Сколькими способами можно выбрать трёх дежурных, если в классе 20 учащихся?

Решение:

m=20, n=3, отличаются друг от друга самим элементом.

$C_{20}^3 = \frac{20!}{(20-2)!2!} = \frac{20!}{18!\cdot 2!} = \frac{19\cdot 20}{2} = 19\cdot 10 = 190$.

Ответ: 190.

План работы:

1 вариант	2 вариант
1) Сколько различных трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3 при условии что ни одна цифра в числе не повторяется? 2) Сколькими способами можно выбрать двух человек в президиум, если на собрании присутствуют 65 человек? 3) Сколько существует вариантов распределения трех призовых мест, если в розыгрыше участвуют 5 команд? 4)Какова вероятность того, что при трёх бросаниях монеты она два раза упадет гербом кверху? 5) имеется две урны с шарами. в первой находится 7 белых и три красных шара, во второй - 5 белых и 5 красных шаров. Выбирают наугад одну из урн и вынимают из неё один шар. Найти вероятность того, что этот шар белый?	1) В соревнованиях участвовало четыре команды. Сколько вариантов распределения мест между ними возможно? 2) Сколько вариантов распределения трех путевок в санатории различного профиля можно составить для пяти претендентов? 3) Сколькими способами можно заполнить лотерейный билет "5 из 36"? 4)В группе 40 студентов, из них 10 изучают английский, 15 - немецкий, остальные изучают немецкий и английский. Какова вероятность того, что выбранный наудачу студент знает оба языка? 5) В урне 6 черных, 8 красных и 6 белых шаров. Последовательно вынимается три шара. Найти вероятность того, что первый шар окажется черным, второй - красным, третий - белый.
3 вариант	**4 вариант**
1) Из 10 кандидатов нужно выбрать 3 человека на конференцию. Сколькими различными способами можно это сделать? 2) Сколько различных пятизначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4 так, чтобы в каждом числе цифры не повторялись? 3) Расписание одного дня состоит из 5 уроков. Определить число вариантов расписания при выборе из 11 дисциплин. 4) Вероятность того, что студент сдаст первый экзамен, равна 0,9; второй - 0,9; третий - 0,8. Найти вероятность того, что студентам будут сданы только два экзамена. 5) Имеется три урны. В первой урне находится 5 белых шаров и 7 черных, во	1) Бригадир должен отправить на работу бригаду из трех человек. Сколько таких бригад можно составить из 10 человек? 2) На собрании должны выступить 5 человек. Сколькими способами их можно разместить в списке выступающих? 3) Расписание одного дня состоит из 4 уроков. Определить число вариантов расписания при выборе из 8 дисциплин. 4) Произведено три выстрела по цели из орудия. Вероятность попадания при первом выстреле равна 0,75; при втором - 0,8; при третьем - 0,9. Определить вероятность того, что будет три попадания.

второй - 4 белых и два черных, в третьей - 10 белых шаров. Вынимают наугад один шар. Урна выбирается тоже наугад. Найти вероятность того, что этот шар окажется белым?	5) Среди 15 лампочек 4 стандартные. Одновременно берут наудачу две лампочки. Найти вероятность того, что хотя бы одна из них нестандартная.
5 вариант	**6 вариант**
1) Сколькими способами можно расставить на полке6 книг? 2) Сколькими способами можно выбрать гласную и согласную буквы из слова "журнал" ? 3) Сколько различных четырехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9? 4) В коробке имеется 30 лотерейных билетов, из них 25 без выигрыша. Наугад вынимают одновременно 4 билета. Найдите вероятность того, что два из них окажутся выигрышными. 5) В урне находятся10 белых, 12 красных, 20 синих и 8 черных шаров. Найдите вероятность того, что вынутый шар окажется черным или красным.	1) Сколькими способами можно составить дозор из трех солдат, если имеется 80 солдат? 2) Сколько вариантов распределения трех призовых мест, если в розыгрыше участвуют 10 человек? 3) Сколькими способами можно составить список из 8 человек? 4)) В урне находятся10 белых, 12 красных, 20 синих и 8 черных шаров. Найдите вероятность того, что вынутый шар окажется белым или синим. 5) Вероятность своевременного выполнения студентом контрольной работы по каждой из трёх дисциплин равна соответственно 0,6, 0,5 и 0,8. Найти вероятность своевременного выполнения контрольной работы студентом по двум дисциплинам.
7 вариант	**8 вариант**
1) Порядок выступления 7 участников конкурса определяется жребием. Сколько различных вариантов при этом возможно? 2) В шахматном турнире участвуют 16 человек. Сколько партий должно быть сыграно в турнире, если между любыми двумя участниками должна быть сыграна одна партия? 3) Сколькими способами можно разложить 5 книг на полке? 4) В урне находятся10 белых, 12 красных, 20 синих и 8 черных шаров. Найдите вероятность того, что вынутый шар окажется черным. 5) На полке стоят 10 книг, среди которых 3 книги по теории	1) Сколькими способами могут разместиться 5 человек вокруг круглого стола? 2) Сколькими способами можно составить флаг, состоящий из трех горизонтальных полос различных цветов, если имеется материал семи различных цветов? 3) Расписание одного дня состоит из 5 уроков. Определить число вариантов расписания при выборе из 9 дисциплин. 4) В урне находятся10 белых, 12 красных, 20 синих и 8 черных шаров. Найдите вероятность того, что вынутый шар окажется синим. 5) Найти вероятность того, что

вероятностей. Наудачу берутся 3 книги. Какова вероятность, что среди отобранных хотя бы одна книга по теории вероятности?	получится слово "АНАНАС", если на отдельных карточках написаны три буквы А, две буквы Н и одна буква С.
9 вариант	
1) Из 6 открыток надо выбрать 3. Сколькими способами можно это сделать? 2) Сколько двузначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 5, 7, 8 так, чтобы в каждом числе не было одинаковых цифр? 3) Сколькими способами можно составить список из 6 человек? 4) В урне находятся10 белых, 12 красных, 20 синих и 8 черных шаров. Найдите вероятность того, что вынутый шар окажется черным или белым. 5) Сколькими способами можно выставить дозор из трех солдат и одного офицера, если есть 80 солдат и 3 офицера?	

Контрольные вопросы:

1) Элементы комбинаторики, формулы для вычисления перестановок, размещений, сочетаний.
2) Классическое определение вероятности.
3) Теоремы сложения, умножения вероятностей.

Практическая работа №8 «Теорема сложения и умножения вероятностей. Формула полной вероятности. Формула Байеса»

Цель работы:

студент должен:

знать:

- теоремы сложения, умножения вероятностей;

уметь:

- вычислять вероятность событий.

Сведения из теории:

Вероятность несовместных событий

Вероятность появления одного из нескольких попарно несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий: $P(A+B)=P(A)+P(B)$.

Пример 105.

В ящике в случайном порядке разложены 20 деталей, причем пять из них стандартные. Рабочий берет наудачу три детали. Найти вероятность того, что, по крайней мере, одна из взятых деталей окажется стандартной (событие A).

Решение:

очевидно, что, по крайней мере, одна из взятых деталей окажется стандартной, если произойдет любое из трех несовместных событий: B – одна деталь стандартная, две нестандартные; C – две детали стандартные, одна нестандартная; *Д* – три детали стандартные.

Т.о., событие *А* можно представить в виде суммы этих трех событий: *А*=*В*+*С*+*Д*.

Тогда *Р*(*А*)=*Р*(*В*)+*Р*(*С*)+*Р*(*Д*).

Вычислим вероятность каждого события:

$$P(B) = \frac{C_5^1 \cdot C_5^2}{C_{20}^3} = \frac{5 \cdot 15 \cdot 14}{1 \cdot 1 \cdot 2} = \frac{35}{76}$$

$$P(C) = \frac{C_5^2 \cdot C_{15}^1}{C_{20}^3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 15 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 20 \cdot 19 \cdot 18} = \frac{5}{38}$$

$$P(Д) = \frac{C_5^3}{C_{20}^3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 20 \cdot 19 \cdot 18} = \frac{1}{114}$$

Итак,

$$P(A) = \frac{35}{76} + \frac{5}{38} + \frac{1}{114} = \frac{137}{228} = 0{,}601$$

Вероятность совместных событий

Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

Пример 106.

Найти вероятность того, что наудачу взятое двузначное число окажется кратным либо 3, либо 5, либо тому и другому одновременно?

Решение:

пусть *А* – число кратно 3, *В* – число кратно 5. Всего имеется 90 двузначных чисел: 10, 11, …, 98, 99. Из них 30 – кратные 3, 18 – кратные 5 и шесть чисел одновременно кратны и 3 и 5, поэтому:

$$P(A) = \frac{30}{90} = \frac{1}{3}, \quad P(B) = \frac{18}{90} = \frac{1}{5}, \quad P(AB) = \frac{6}{90} = \frac{1}{15}.$$

Т.к. *А* и *В* совместные события, то по формуле имеем:

$$P(A) = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{15} = \frac{7}{15} = 0{,}467.$$

Задания для самостоятельного решения:

Решите задачи, используя теоремы сложения, умножения вероятностей:

1) В первой урне находятся 10 белых и 4 черных шаров, а во второй 5 белых и 9 черных шаров. Из каждой урны вынули по шару. Какова вероятность того, что оба шара окажутся черными?

2) Трое учащихся на экзамене независимо друг от друга решают одну и ту же задачу. Вероятности ее решения этими учащимися равны 0,8, 0,7 и 0,6 соответственно. Найдите вероятность того, что хотя бы один учащийся решит задачу.

3) Экспедиция издательства отправила газеты в три почтовых отделения. Вероятность своевременной доставки газет в первое отделение равна 0,95, во второе – 0,9, в третье – 0,8. Найти вероятность следующих событий:

а) только одно отделение получит газеты вовремя;

б) хотя бы одно отделение получит газеты с опозданием.

4) Вероятность хотя бы одного попадания в цель при четырех выстрелах равна 0,9984. Найти вероятность попадания в цель при одном выстреле.

Контрольные вопросы:

1. Сформулируйте теоремы сложения, умножения вероятностей.

Практическая работа №9 «Вычисление статистических оценок параметров распределения. Обработка статистических данных»

Построение статистической функции распределения ее графика

Цель: решение задач на построение для заданной выборки ее графической диаграммы, расчёта по заданной выборке её числовых характеристик, развитие логического и творческого мышления студентов, самостоятельной деятельности, вычислительных навыков.

Задания для самостоятельного решения:

Вариант 1.

№ 1. Для выборки 7,-7,2,7,7,5,5,7,5,-7 определите: а) размах выборки; б) объём выборки; в)статистический ряд; г) выборочное распределение; д) полигон частот; е) выборочное среднее; ж)выборочную дисперсию; з) несмещенную выборочную дисперсию.

№ 2. Построить гистограмму частот по данному распределению выборки.

Номер интервала	Частичный интервал	Сумма частот
1	10-15	2
2	15-20	4
3	20-25	8
4	25-30	4
5	30-35	2

Замечание. Найти предварительно плотность частоты для каждого интервала.

Вопросы для самопроверки.

1. Дайте определение вариационного ряда.
2. Что называется размахом выборки?
3. Как для данной выборки получают статистический ряд и выборочное распределение?
4. Какие графические изображения выборок вы знаете?
5. Чему равна площадь гистограммы относительных частот?
6. Дайте определение выборочного среднего.
7. Дайте определение выборочной дисперсии.

8. Как связаны между собой выборочная дисперсия и несмещенная выборочная дисперсия?

Вариант 2.

№ 1. Для выборки 5,2,8,-2,5,-2,0,0,8,5 определите: а) размах выборки; б) объём выборки; в)статистический ряд; г) выборочное распределение; д) полигон частот; е) выборочное среднее; ж)выборочную дисперсию; з) несмещенную выборочную дисперсию.

№ 2. Построить гистограмму частот по данному распределению выборки.

Номер интервала	Частичный интервал	Сумма частот
1	2-5	6
2	5-8	7
3	8-11	4
4	11-14	5
5	14-17	3

Замечание. Найти предварительно плотность частоты для каждого интервала.

Контрольные вопросы:

1. Дайте определение вариационного ряда.
2. Что называется размахом выборки?
3. Как для данной выборки получают статистический ряд и выборочное распределение?
4. Какие графические изображения выборок вы знаете?
5. Чему равна площадь гистограммы относительных частот?
6. Дайте определение выборочного среднего.
7. Дайте определение выборочной дисперсии.
8. Как связаны между собой выборочная дисперсия и несмещенная выборочная дисперсия?

Практическая работа №10 «Операции над матрицами»

Цель занятия: Научиться выполнять действия с матрицами, вычислять определители.

Студент должен:

знать:

определение матрицы;

формулу определителя матрицы второго и третьего порядка;

методы решения систем линейных уравнений.

Сведения из теории:

Матрицей размера m×n, где m- число строк, n- число столбцов, называется таблица чисел, расположенных в определенном порядке. Эти числа называются элементами матрицы. Место каждого элемента однозначно определяется номером строки и столбца, на пересечении которых он находится. Элементы матрицы обозначаются a_{ij}, где i- номер строки, а j- номер столбца.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Транспонированной к матрице A называется матрица A^T, у которой строки и столбцы меняются местами.

Например, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix}$, $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;

Действия с матрицами

1) *Умножение матрицы на число.* Для того чтобы умножить матрицу $A = (a_{ij})$ на число λ, нужно каждый элемент матрицы A умножить на это число: $\lambda A = (\lambda a_{ij})$.

2) *Сложение матриц.* Складывать можно только матрицы с одинаковым числом строк и столбцов, т.е. матрицы одинаковых размеров. Суммой матриц $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ называется матрица $C = (c_{ij})$, элементы которой равны суммам соответствующих элементов матриц A и B, т.е. $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ для любых индексов *i, j*.

Пример. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, найти 2A + B.

$$2A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 2 & 8 \\ 6 & 4 & 6 \end{pmatrix}, \qquad 2A + B = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 10 \\ 9 & 9 & 16 \\ 7 & 6 & 10 \end{pmatrix}.$$

3) *Умножение матриц.* Произведение матрицы A на матрицу B (обозначается AB) определено только в том случае, когда число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B. В результате умножения получим матрицу $C = AB$, у которой столько же строк, сколько их в матрице A, и столько же столбцов, сколько их в матрице B.

Пример. Найти произведение матриц $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

$$AB = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 2 & 1\cdot 4 & 1\cdot 1 \\ 4\cdot 2 & 4\cdot 4 & 4\cdot 1 \\ 3\cdot 2 & 3\cdot 4 & 3\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 8 & 16 & 4 \\ 6 & 12 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = 2{\cdot}1 + 4{\cdot}4 + 1{\cdot}3 = 2 + 16 + 3 = 21.$$

<u>Пример.</u> Найти произведение матриц $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+10 & 4+12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 16 \end{pmatrix}.$$

Определители

Каждой квадратной матрице A может быть поставлено в соответствие некоторое число, вычисляемое по определенному правилу с помощью элементов матрицы. Такое число называют ***определителем*** (или *детерминантом*) матрицы A и обозначают символом $|A|$ или $\det A$. При этом *порядком* определителя называют порядок соответствующей матрицы.

Правила вычисления определителей 2-го и 3-го порядков легко выписать:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Последнюю формулу, несмотря на внешнюю сложность записи, нетрудно запомнить. Если соединить линией каждые три элемента определителя, произведение которых входит в правую часть последней формулы со знаком «+», то получим легко запоминающуюся *схему 1*. Аналогично для произведений, входящих со знаком «–», имеем *схему 2*.

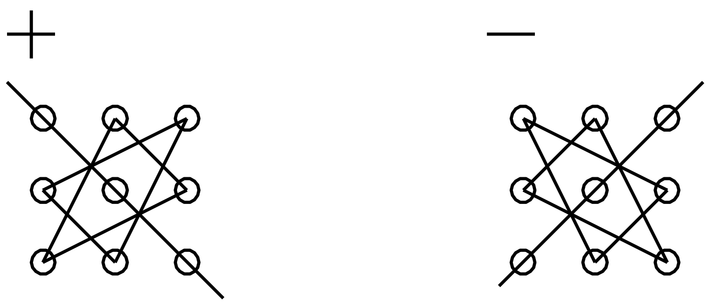


Схема 1 *Схема 2*

Способы вычисления определителей:

1. Определитель можно вычислить, используя непосредственно его определение. Этим способом удобно вычислять определители второго и третьего порядка.
2. Определитель можно вычислить с помощью его разложения по элементам строки или столбца.
3. Определитель можно вычислить способом приведения к треугольному виду. Чтобы получить треугольный определитель, нужно к

какой-либо строке (или столбцу) заданного определителя прибавлять соответствующие элементы другой строки (или столбца), умноженные на одно и то же число, до тех пор, пока не придем к определителю треугольного вида.

Пример. Вычислить определитель матрицы по правилу треугольников A $= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = (-2 \cdot 1 - 1 \cdot 3) - 2(0 \cdot 1 - 3 \cdot 3) + (0 \cdot 1 + 3 \cdot 2) =$$

= -5 + 18 + 6 = 19.

Пример. Вычислить определитель с помощью его разложения по элементам первой строки.

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} - 4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

Значение определителя: $-1 \cdot 10 + 3 \cdot 2 - 4 \cdot 10 = -44$.

Контрольные вопросы для зачета:

1. Что называется матрицей?
2. Что называется суммой матриц?
3. Что называется произведением матрицы на число?
4. Какая матрица называется транспонированной к матрице А?
5. Как найти произведение двух матриц?
6. В чем состоит обязательное условие существования произведения матриц?
7. Что называется определителем матрицы?
8. Какие способы вычисления определителей вам известны?

Практическая работа № 11 «Решение систем линейных алгебраических уравнений матричным методом»

Практическая работа № 12 «Решение систем линейных алгебраических уравнений по формулам Крамера»

Цель работы:

уметь:

вычислять определитель матрицы второго и третьего порядка;

выполнять действия над матрицами;

решать системы линейных алгебраических уравнений.

Необходимые для работы знания:

Студент должен:

знать:
определение матрицы;
формулу определителя матрицы второго и третьего порядка;
методы решения систем линейных уравнений.

Сведения из теории:

Решение систем линейных уравнений методом Крамера:

<u>Теорема.</u>

Система *n* уравнений с *n* неизвестными, определитель которой отличен от нуля, всегда имеет решение и притом единственное. Оно находится следующим образом: значение каждого из неизвестных равно дроби, знаменателем которой является определитель системы, а числитель получается из определителя системы заменой столбца коэффициентов при искомом неизвестном на столбец свободных членов.

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta},\quad x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta}, \ldots,\quad x_n = \frac{\Delta x_n}{\Delta}.$$

Пример 19.

Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 3, \\ 5x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 - x_3 = -2. \end{cases}$$

Решение:

Вычислим определитель системы и определители при неизвестных:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-2) \cdot (-1) + 2 \cdot (-2) \cdot 1 + 5 \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot (-2) \cdot 1 - 5 \cdot 2 \cdot (-1) - 1 \cdot (-2) \cdot 3 = 6 - 4 + 5 + 2 + 10 + 6 = 25.$$

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-2) \cdot (-1) + 2 \cdot (-2) \cdot (-2) + 3 \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot (-2) \cdot (-2) - 3 \cdot 2 \cdot (-1) - 1 \cdot (-2) \cdot 3 = 6 + 8 + 3 - 4 + 6 + 6 = 25.$$

$$\Delta x_2 = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 3 \cdot (-1) + 3 \cdot (-2) \cdot 1 + 5 \cdot (-2) \cdot 1 - 1 \cdot 3 \cdot 1 - 5 \cdot 3 \cdot (-1) - (-2) \cdot (-2) \cdot 3 = -9 - 6 - 10 - 3 + 15 - 12 = -25.$$

$$\Delta x_3 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 5 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-2) \cdot (-2) + 2 \cdot 3 \cdot 1 + 5 \cdot 1 \cdot 3 - 3 \cdot (-2) \cdot 1 - 5 \cdot 2 \cdot (-2) - 1 \cdot 3 \cdot 3 = 12 + 6 + 15 + 6 + 20 - 9 = 50.$$

Найдем значения x_1, x_2, x_3 по формулам Крамера:

$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta} = \frac{25}{25} = 1;$ $x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta} = \frac{-25}{25} = -1;$ $x_3 = \frac{\Delta x_3}{\Delta} = \frac{50}{25} = 2.$

Ответ: **(1; -1; 2).**

Решение систем линейных уравнений матричным способом:

Так как систему линейных уравнений можно записать в виде матричного уравнения, то эту систему можно решить как матричное уравнение.

Пример20.

Решить матричным способом систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 10, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 23, \\ x_2 + 2x_3 = 13. \end{cases}$$

Решение:

Составим матричное уравнение   AX=B, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 10 \\ 23 \\ 13 \end{pmatrix}$$

и решим его указанным способом. Находим

D=$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \cdot 0 + 3 \cdot 1 \cdot 0 - 0 \cdot 2 \cdot 0 - 3 \cdot 2 \cdot 2 - 1 \cdot 1 \cdot 1 = 4 - 12 - 1 = -9 \neq 0;$

$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 3;$

$A_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -(3 \cdot 2 - 1 \cdot 0) = -6;$

$A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 0 = 3;$

$A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(2 \cdot 2 - 0 \cdot 1) = -4;$

$A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - 0 = 2;$

$A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -(1 \cdot 1 - 2 \cdot 0) = -1;$

$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - 0 \cdot 2 = 2;$

$A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -(1 \cdot 1 - 0 \cdot 3) = -1;$

$A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - 2 \cdot 3 = -4,$

Составим матрицу $\begin{pmatrix} 3 & -6 & 3 \\ -4 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -4 \end{pmatrix}$ и транспонируем её: $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -6 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -4 \end{pmatrix}$

запишем обратную матрицу:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{4}{9} & -\frac{2}{9} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}$$

$$\text{X}=A^{-1}B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{4}{9} & -\frac{2}{9} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 23 \\ 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}\cdot 10 + \frac{4}{9}\cdot 23 - \frac{2}{9}\cdot 13 \\ \frac{2}{3}\cdot 10 - \frac{2}{9}\cdot 23 + \frac{1}{9}\cdot 13 \\ \frac{1}{3}\cdot 10 + \frac{1}{9}\cdot 23 + \frac{4}{9}\cdot 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Ответ: $\boldsymbol{x_1 = 4}$; $\boldsymbol{x_2 = 3}$; $\boldsymbol{x_3 = 5}$.

План работы:

№1. Решить систему линейных уравнений матричным методом

1 вариант	2 вариант	3 вариант
$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 6 \\ -x_1 - x_2 + 5x_3 = -2 \end{cases}$	$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 + 2x_2 \quad - 3 \end{cases}$	$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 = -6 \\ 2x_1 - x_2 \quad = -3 \\ 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 15 \end{cases}$
4 вариант	5 вариант	6 вариант
$\begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_3 = 4 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 1 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 4 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \\ 3x_2 - 2x_3 = 4 \\ 5x_1 - 4x_2 + 8x_3 = 3 \end{cases}$	$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = -10 \\ 2x_1 \quad + 4x_3 = 12 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_2 = -3 \end{cases}$
7 вариант	8 вариант	9 вариант
$\begin{cases} 5x_1 - x_2 \quad = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 4x_1 \quad + x_3 = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} 5x_2 - x_3 = -19 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 = -6 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$	$\begin{cases} 5x_1 + 8x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_1 - 2x_2 + 6x_3 = -7 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -5 \end{cases}$

№2. Решить систему линейных уравнений методом Крамера.

1 вариант	2 вариант	3 вариант
$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 9 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 3 \\ -x_1 + x_2 - 3x_3 = -14 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - x_3 = 2 \\ -x_1 - x_2 + 8x_3 = 5 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 11 \end{cases}$	$\begin{cases} 7x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 21 \\ x_1 + x_2 - 5x_3 = 13 \\ -2x_1 - 3x_2 - x_3 = -5 \end{cases}$
4вариант	5 вариант	6 вариант
$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 14 \\ -5x_1 + 3x_2 - x_3 - 17 \\ x_1 - 9x_2 + 3x_3 = -47 \end{cases}$	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 27 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 0 \\ 6x_1 - 2x_2 - 4x_3 = 22 \end{cases}$	$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 12 \\ x_1 - x_2 - 5x_3 = 18 \\ 2x_1 - 7x_2 - x_3 = 5 \end{cases}$
7 вариант	8 вариант	9 вариант

$\begin{cases} 5x_1 - x_2 + x_3 = -2 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 8 \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -4 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = -11 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 = 23 \\ 4x_1 + 2x_2 - x_3 = -11 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - x_3 = -9 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ -2x_1 + 4x_2 - 7x_3 = 15 \end{cases}$

Контрольные вопросы:

1) Как решить матричное уравнение?
2) Сформулируйте теорему Крамера.
3)Запишите формулу Крамера.

Практическая работа № 13 «Решение систем линейных алгебраических уравнений методом Гаусса»

Цель работы:

уметь:

вычислять определитель матрицы второго и третьего порядка;
выполнять действия над матрицами;
решать системы линейных алгебраических уравнений.

Необходимые для работы знания:

Студент должен:

знать:

определение матрицы;
формулу определителя матрицы второго и третьего порядка;
методы решения систем линейных уравнений.

Сведения из теории:

Решение систем линейных уравнений методом Гаусса:

Метод Гаусса состоит в следующем:

Систему уравнений приводят к эквивалентной ей системе с треугольной матрицей. Эти действия называют прямым ходом. Из полученной треугольной системы переменные находят с помощью последовательных постановок (обратный ход).

При выполнении прямого хода используют следующие преобразования:

1. Умножение или деление коэффициентов свободных членов на одно и тоже число;
2. Сложение и вычитание уравнений;
3. Перестановку уравнений системы;
4. Исключение из системы уравнений, в которых все коэффициенты при неизвестных и свободные члены равны нулю.

Например:

Используя метод Гаусса, решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3x + 2y - z = 4, \\ 2x - y + 3z = 9 \\ x - 2y + 2z = 3 \end{cases}$$

Решение:

Представим третье уравнение на место первого

$$\begin{cases} x - 2y + 2z = 3, \\ 3x + 2y - z = 4 \\ 2x - y + 3z = 9 \end{cases}$$

Запишем расширенную матрицу

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & -1 & 3 & 9 \end{array}\right)$$

Чтобы в первом столбце получить $a_{21} = a_{31} = 0$, умножим 1-ю строку сначало на 3, а затем на 2 и вычтем результаты из 2 – ой и 3-й строк:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 8 & -7 & -5 \\ 0 & 3 & -1 & 3 \end{array}\right)$$

Разделим 1-ю строку на 8, полученные результаты умножим на 3 и вычтем из 3-ей строки:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{8} & -\frac{5}{8} \\ 0 & 0 & \frac{13}{8} & \frac{39}{8} \end{array}\right)$$

Запишем новую эквивалентную систему, которая соответствует расширенная матрица:

$$\begin{cases} x - 2y + 2z = 3 \\ y - \frac{7}{8}z = -\frac{5}{8} \\ \frac{13}{8}z = \frac{39}{8} \end{cases}$$

Выполняя обратный ход, с помощью последовательных подстановок находим неизвестные:

$\frac{13}{8}z = \frac{39}{8}$;

$z = 3$

$y - \frac{7}{8} \cdot 3 = -\frac{5}{8}$;

$y = -\frac{5}{8} + \frac{21}{8} = 2$;

$x - 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 3$;

$x = 3 + 4 - 6 = 1$

Ответ: (1; 2; 3)

План работы:

№1. Решить методом Гаусса следующие системы уравнений:

1 вариант	2 вариант	3 вариант
$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 9 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 3 \\ -x_1 + x_2 - 3x_3 = -14 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - x_3 = 2 \\ -x_1 - x_2 + 8x_3 = 5 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 11 \end{cases}$	$\begin{cases} 7x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 21 \\ x_1 + x_2 - 5x_3 = 13 \\ -2x_1 - 3x_2 - x_3 = -5 \end{cases}$
4вариант	5 вариант	6 вариант
$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 14 \\ -5x_1 + 3x_2 - x_3 - 17 \\ x_1 - 9x_2 + 3x_3 = -47 \end{cases}$	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 27 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 0 \\ 6x_1 - 2x_2 - 4x_3 = 22 \end{cases}$	$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 12 \\ x_1 - x_2 - 5x_3 = 18 \\ 2x_1 - 7x_2 - x_3 = 5 \end{cases}$
7 вариант	8 вариант	9 вариант
$\begin{cases} 5x_1 - x_2 + x_3 = -2 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 8 \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -4 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = -11 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 = 23 \\ 4x_1 + 2x_2 - x_3 = -11 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - x_3 = -9 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ -2x_1 + 4x_2 - 7x_3 = 15 \end{cases}$

Контрольные вопросы:

1) Как решить матричное уравнение?

2) Сформулируйте метод Гаусса.