

Документ подписан простой электронной подписью

Информация о владельце:

ФИО: Крюков Вадим Николаевич

Должность: Проректор по образовательной деятельности и молодежной политике

Дата подписания: 25.06.2026 10:51:34

Уникальный программный ключ:

1b0adb7fd710f6a0705d90c58682b00c3f2f2302

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

«Заполярье: государственный университет им. Н. М. Федоровского»

ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

по дисциплине

Ряды и дифференциальные уравнения

Уровень образования: бакалавриат

22.03.02 Металлургия

Профиль: Прогрессивные технологии металлургии цветных металлов

Кафедра: Физико-математические дисциплины

Разработчик ФОС: _____ / Фидарова М.Г. /

Оценочные материалы по дисциплине рассмотрены и одобрены на заседании кафедры, протокол № 9 от «10» июня 2026 г.

Заведующий кафедрой _____ / Фаддеенков А.В. /

Фонд оценочных средств по дисциплине «Математика. Ряды и дифференциальные уравнения» для текущей и промежуточной аттестации разработан в соответствии с Федеральным государственным образовательным стандартом высшего образования по направлению подготовки **22.03.02 Металлургия**, Профиль: Прогрессивные технологии металлургии цветных металлов рабочей программой дисциплины «Ряды и дифференциальные уравнения» Положения о формировании Фонда оценочных средств по дисциплине (ФОС), Положения о проведении текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся ЗГУ, Положения о государственной итоговой аттестации (ГИА) выпускников по образовательным программам высшего образования в ЗГУ им. Н.М. Федоровского.

1. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю), соотнесённых с планируемыми результатами образовательной программы

Таблица 1 – Компетенции и индикаторы их достижения

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения и планируемые результаты обучения по дисциплине
УК-1: Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1: Осуществляет поиск, критический анализ и синтез информации, необходимой для решения поставленных задач УК-1.2: Применяет системный подход для решения поставленных задач

Планируемые результаты обучения

Знать	Уметь	Владеть
фундаментальные основы рядов и дифференциальных уравнений (основные понятия, свойства, методы); методы решения рядов и дифференциальных уравнений для стандартных задач профессиональной деятельности	применять основные методы исследования рядов и решения дифференциальных уравнений в рамках дисциплины и для решения основных профессиональных задач; создавать и применять модели рядов и дифференциальных уравнений в профессиональной деятельности.	навыками использования аппарата рядов и дифференциальных уравнений при решении задач в рамках дисциплины; навыками теоретического и экспериментального исследования объектов профессиональной деятельности; методами применения дифференциальных уравнений при решении прикладных задач в профессиональной деятельности.

Таблица 2. Паспорт фонда оценочных средств

Контролируемые разделы (темы) дисциплины	Формируемая компетенция	Наименование оценочного средства	Форма оценивания
Определение числового ряда. Сходимость и сумма ряда. Свойства ряда. Геометрический и гармонический ряды. Необходимый и достаточные	УК-1.1, УК-1.2	Устный/письменный опрос; тестовые задания; практические расчётные задания; контрольная работа (типовой расчёт1)	Устно/письменно

признаки сходимости числовых рядов.			
Знакопеременные и знакопеременные ряды. Признак Лейбница. Абсолютная и условная сходимость.	УК-1.1, УК-1.2,	Устный/письменный опрос; тестовые задания; практические расчётные задания; контрольная работа (типовой расчёт 1)	Устно/письменно
Функциональные и степенные ряды. Область, интервал и радиус сходимости. Ряды Тейлора и Маклорена.	УК-1.1, УК-1.2,	Устный/письменный опрос; тестовые задания; практические расчётные задания; контрольная работа (типовой расчёт 1)	Устно/письменно
Приложения степенных рядов: приближённые вычисления значений функций и определённых интегралов.	УК-1.1, УК-1.2,	Устный/письменный опрос; тестовые задания; практические расчётные задания; контрольная работа (типовой расчёт 1)	Устно/письменно
Ряды Фурье. Разложение периодических и непериодических функций. Практический гармонический анализ.	УК-1.1, УК-1.2,	Устный/письменный опрос; тестовые задания; практические расчётные задания; контрольная работа (типовой расчёт 1)	Устно/письменно
Основные понятия дифференциальных уравнений. Задача Коши. Уравнения первого порядка с разделяющимися переменными.	УК-1.1, УК-1.2,	Устный/письменный опрос; тестовые задания; практические расчётные задания; контрольная работа (типовой расчёт 2)	Устно/письменно
Однородные, линейные уравнения первого порядка, уравнения Бернулли, уравнения в полных дифференциалах.	УК-1.1, УК-1.2,	Устный/письменный опрос; тестовые задания; практические расчётные задания; контрольная работа (типовой расчёт 2)	Устно/письменно
Дифференциальные уравнения высших порядков. ЛОДУ и ЛНДУ второго порядка с постоянными коэффициентами.	УК-1.1, УК-1.2,	Устный/письменный опрос; тестовые задания; практические расчётные задания; контрольная работа (типовой расчёт 2)	Устно/письменно
Системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.	УК-1.1, УК-1.2,	Устный/письменный опрос; тестовые задания; практические расчётные задания;	Устно/письменно

		контрольная работа (типовой расчёт 2)	
Приближённое решение дифференциальных уравнений. Метод Эйлера для уравнений и систем.	УК-1.1, УК-1.2,	Устный/письменный опрос; тестовые задания; практические расчётные задания; контрольная работа (типовой расчёт 2)	Устно/письменно
Интегрирование дифференциальных уравнений при помощи степенных рядов. Метод Лагранжа вариации произвольных постоянных.	УК-1.1, УК-1.2,	Устный/письменный опрос; тестовые задания; практические расчётные задания; контрольная работа (типовой расчёт 2)	Устно/письменно

2. Перечень контрольно-оценочных средств (КОС)

Для определения качества освоения обучающимися учебного материала по дисциплине используются контрольно-оценочные средства текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации.

Таблица 3 – Перечень контрольно-оценочных средств

№	Наименование оценочного средства	Сроки выполнения	Шкала оценивания	Критерии оценивания
1	Текущий контроль качества: устный/письменный опрос, практические задания, тестовые задания	2 семестр	Достигнут / не достигнут пороговый уровень освоения компетенции	Зачтено / не зачтено
2	Контрольная работа (типовой расчёт 1)	2 семестр	Достигнут / не достигнут пороговый уровень освоения компетенции	Зачтено / не зачтено
3	Промежуточная аттестация: зачёт	2 семестр	Освоил / не освоил компетенцию	Зачтено / не зачтено

Шкала и критерии оценивания

«Зачтено» выставляется обучающемуся, если он показывает знание основных положений дисциплины, умеет применять методы исследования рядов и решения дифференциальных уравнений, выполняет расчётные задания, аргументирует ход решения и способен интерпретировать полученный результат в учебной или профессионально ориентированной задаче.

«Не зачтено» выставляется обучающемуся, если выявлены существенные пробелы в знаниях, обучающийся не владеет основными методами решения задач, допускает принципиальные математические ошибки и не может получить корректный результат даже при направляющей помощи преподавателя.

3. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и опыта деятельности

3.1. Задания для текущего контроля успеваемости

Вопросы для устного или письменного опроса

В целях проверки знаний обучающихся, владения основными понятиями и умения применять методы дисциплины преподавателем могут быть использованы следующие вопросы.

1. Дайте определение числового ряда, частичной суммы ряда и суммы сходящегося ряда.
2. Сформулируйте необходимый признак сходимости числового ряда. Почему он не является достаточным?
3. Какие свойства сходящихся рядов используются при преобразовании рядов?
4. Запишите условие сходимости геометрического ряда и формулу его суммы.
5. В чём заключается расходимость гармонического ряда?
6. Сформулируйте признак сравнения для рядов с положительными членами.
7. Сформулируйте предельный признак сравнения.
8. Сформулируйте признак Даламбера и укажите область его применения.
9. Сформулируйте радикальный признак Коши.
10. Сформулируйте интегральный признак сходимости рядов.
11. Что такое знакопеременный ряд? Сформулируйте признак Лейбница.
12. Чем отличаются абсолютная и условная сходимость ряда?
13. Дайте определение функционального ряда и области его сходимости.
14. Что такое степенной ряд? Как определяются радиус и интервал сходимости?
15. Запишите общий вид ряда Тейлора и ряда Маклорена.
16. Как используются степенные ряды для приближённого вычисления значений функций?
17. В чём состоит идея разложения функции в ряд Фурье?
18. Что характеризуют коэффициенты ряда Фурье в инженерной интерпретации?
19. Дайте определение дифференциального уравнения и его порядка.
20. Что такое общее и частное решение дифференциального уравнения?
21. Сформулируйте задачу Коши для дифференциального уравнения первого порядка.
22. Опишите метод решения уравнения с разделяющимися переменными.
23. Как распознаётся однородное дифференциальное уравнение первого порядка?
24. Опишите структуру решения линейного дифференциального уравнения первого порядка.
25. В чём состоит метод решения уравнения Бернулли?
26. Как проверить, что дифференциальное уравнение является уравнением в полных дифференциалах?
27. Как решаются линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами?
28. Как выбирается вид частного решения ЛНДУ с правой частью специального вида?
29. Как записывается система линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами?
30. В чём состоит метод Эйлера для приближённого решения задачи Коши?
31. Как оценивается практический смысл решения дифференциального уравнения в инженерной задаче?
32. Какие ограничения имеет приближённое решение дифференциальных уравнений численными методами?

Примерные практические задания текущего контроля

№	Типовое задание	Проверяемые действия обучающегося
1	Исследовать на сходимость числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \sin \frac{2\pi}{3^n}$;	Преобразовать общий член, применить признак сравнения или телескопическое представление, сделать вывод о сходимости.
2	Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{(2n+1) \cdot n}$.	Применить признак Лейбница; проверить ряд модулей как гармонический.
3	Найти радиус и интервал сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{5^n}$;	Применить признак Даламбера; отдельно проверить концы интервала.
4	Разложить функцию $f(x)=e^x$ в ряд Маклорена и вычислить $e^{0,1}$ с точностью до членов порядка x^3 .	Записать ряд Маклорена и выполнить приближённый расчёт.
5	Решить уравнение $y'=3x^2y$.	Разделить переменные, проинтегрировать, записать общее решение.
6	Решить задачу Коши $y'=x+y$, $y(0)=1$ методом Эйлера на отрезке $[0;0,3]$ при $h=0,1$.	Выполнить последовательные шаги метода Эйлера и оформить таблицу расчёта.
7	Решить ЛОДУ $y''-5y'+6y=0$.	Составить характеристическое уравнение, найти корни и записать общее решение.
8	Решить систему $x'=x+y$, $y'=2x$ методом сведения к характеристическому уравнению или матричным методом.	Найти собственные значения/решения и записать общий вид решения системы.

Примеры тестовых заданий по всему курсу

Спецификация комплекта оценочных материалов

Код компетенции	Наименование компетенции	Количество заданий
УК-1.1	Выявляет проблемы и анализирует пути их решения, решает практико-ориентированные задачи	15
ОПК-1.1	Способен применять методы математического анализа в профессиональной деятельности	15
Всего		30

Распределение заданий по типу и уровню сложности

Код компетенции	Номера заданий	Тип задания	Уровень сложности	Время выполнения
-----------------	----------------	-------------	-------------------	------------------

УК-1	1–5	Задание с выбором одного верного ответа	низкий/средний	2 мин
УК-1	6–10	Задание на установление последовательности	средний	3 мин
УК-1	11–15	Задание открытого типа с развёрнутым ответом	средний/высокий	5–7 мин
ОПК-1	16–20	Задание с выбором одного верного ответа	низкий/средний	2 мин
ОПК-1	21–25	Задание на установление последовательности	средний	3 мин
ОПК-1	26–30	Задание открытого типа с расчётным/развёрнутым ответом	средний/высокий	5–7 мин

Тестовые задания, позволяющие осуществлять оценку компетенций, установленных образовательной программой

УК-1: Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач

1. В инженерной задаче получен ряд, описывающий накопление малых поправок к расчёту. Какой первый шаг анализа корректен?

- а) сразу принять сумму всех поправок равной первому члену
- б) проверить выполнение необходимого признака сходимости
- в) заменить ряд интегралом без проверки условий
- г) отбросить все отрицательные члены

2. Какая ситуация указывает на необходимость применения математической модели в форме дифференциального уравнения?

- а) параметр зависит только от номера варианта
- б) известна связь скорости изменения величины с самой величиной
- в) требуется только найти среднее арифметическое
- г) даны только независимые измерения без динамики

3. При анализе вибрационного сигнала разложение в ряд Фурье позволяет определить:

- а) только площадь под графиком
- б) гармонический состав сигнала
- в) только предел функции в точке
- г) только корни алгебраического уравнения

4. Если приближённое решение методом Эйлера даёт заметное расхождение с физическим смыслом задачи, рациональное действие студента:

- а) увеличить шаг интегрирования
- б) уменьшить шаг и проверить исходную модель
- в) удалить начальное условие
- г) заменить производную константой

5. Какое утверждение соответствует практико-ориентированному анализу задачи?

- а) важно получить только формальный ответ
- б) необходимо сопоставить математический результат с ограничениями реального объекта
- в) инженерная интерпретация не требуется
- г) достаточно записать формулу без расчёта

6. Расположите этапы решения прикладной задачи с использованием дифференциального уравнения в правильном порядке.

- а) А. Интерпретация результата
- б) В. Формулировка исходной инженерной ситуации
- в) С. Построение математической модели
- г) D. Решение уравнения с учётом начальных условий

7. Установите последовательность анализа числового ряда с положительными членами.

- а) А. Выбор признака сходимости
- б) В. Запись общего члена ряда
- в) С. Проверка условий применимости признака
- г) D. Формулировка вывода о сходимости или расходимости

8. Расположите действия при применении метода Эйлера.

- а) А. Вычислить следующее значение y
- б) В. Задать начальное условие
- в) С. Выбрать шаг h
- г) D. Подставить текущие x и y в правую часть уравнения

9. Установите правильную последовательность работы со степенным рядом.

- а) А. Проверка концов интервала
- б) В. Нахождение радиуса сходимости
- в) С. Запись общего члена ряда
- г) D. Формулировка области сходимости

10. Установите порядок анализа гармонического состава периодического процесса.

- а) А. Вычисление коэффициентов Фурье
- б) В. Задание периода и функции сигнала
- в) С. Выделение основных гармоник
- г) D. Инженерная оценка вклада гармоник

11. Объясните, почему при решении инженерной задачи недостаточно формально получить решение дифференциального уравнения.

Ответ запишите в развёрнутой форме, при необходимости приведите расчёт и пояснение.

12. Опишите, как можно использовать ряд Тейлора для приближённого расчёта значения функции в инженерных вычислениях.

Ответ запишите в развёрнутой форме, при необходимости приведите расчёт и пояснение.

13. Почему выбор шага важен при применении метода Эйлера?

Ответ запишите в развёрнутой форме, при необходимости приведите расчёт и пояснение.

14. Приведите пример профессиональной задачи, где применяется дифференциальное уравнение.

Ответ запишите в развёрнутой форме, при необходимости приведите расчёт и пояснение.

15. Какие признаки показывают, что полученный математический результат требует дополнительной проверки?

Ответ запишите в развёрнутой форме, при необходимости приведите расчёт и пояснение.

ОПК-1: Способен решать задачи профессиональной деятельности, применяя методы моделирования, математического анализа, естественнонаучные и общеинженерные знания

16. Необходимый признак сходимости ряда утверждает, что для сходящегося ряда:

- а) общий член стремится к нулю
- б) общий член стремится к единице
- в) частичные суммы всегда равны нулю
- г) ряд обязательно знакопеременный

17. Геометрический ряд $\sum q^n$ сходится при условии:

- а) $|q| < 1$
- б) $|q| > 1$
- в) $q = 1$
- г) $q = -1$

18. Признак Лейбница применяется к:

- а) рядам с положительными членами произвольного вида
- б) знакоперевающимся рядам при выполнении условий монотонности и стремления членов к нулю
- в) только степенным рядам
- г) только рядам Фурье

19. Радиус сходимости степенного ряда характеризует:

- а) число членов ряда
- б) расстояние от центра ряда до границы интервала сходимости
- в) значение производной функции
- г) период функции

20. Дифференциальное уравнение $y' = f(x)y$ относится к классу:

- а) линейных уравнений первого порядка
- б) уравнений второго порядка
- в) систем уравнений
- г) уравнений в частных производных

21. Расположите шаги решения уравнения с разделяющимися переменными $y' = g(x)h(y)$.

- а) А. Проинтегрировать обе части
- б) В. Разделить переменные
- в) С. Записать общее решение
- г) D. Привести уравнение к дифференциальной форме

22. Установите порядок решения ЛОДУ второго порядка с постоянными коэффициентами.

- а) А. Записать общее решение
- б) В. Составить характеристическое уравнение
- в) С. Найти корни характеристического уравнения
- г) D. Выбрать форму решения в зависимости от корней

23. Расположите этапы исследования степенного ряда.

- а) А. Проверить граничные точки
- б) В. Найти радиус сходимости
- в) С. Сформулировать интервал сходимости
- г) D. Применить признак Даламбера или Коши

24. Установите последовательность применения метода вариации произвольной постоянной для линейного уравнения первого порядка.

- а) А. Подставить $C(x)$ в уравнение
- б) В. Найти решение соответствующего однородного уравнения
- в) С. Определить функцию $C(x)$
- г) D. Записать общее решение неоднородного уравнения

25. Расположите этапы построения ряда Фурье функции.

- а) А. Записать ряд Фурье
- б) В. Вычислить коэффициенты a_0, a_n, b_n
- в) С. Задать функцию и интервал периодичности
- г) D. Проверить условия применимости разложения

26. Исследуйте сходимость ряда $\sum 1/n^2$.

Ответ запишите в развёрнутой форме, при необходимости приведите расчёт и пояснение.

27. Найдите общее решение дифференциального уравнения $y' = 2xy$.

Ответ запишите в развёрнутой форме, при необходимости приведите расчёт и пояснение.

28. Найдите радиус сходимости ряда $\sum x^{n/n}$.

Ответ запишите в развёрнутой форме, при необходимости приведите расчёт и пояснение.

29. Запишите характеристическое уравнение для $y'' - 3y' + 2y = 0$ и найдите его корни.

Ответ запишите в развёрнутой форме, при необходимости приведите расчёт и пояснение.

30. Выполните один шаг метода Эйлера для $y' = x + y$, $y(0)=1$, $h=0,1$.

Ответ запишите в развёрнутой форме, при необходимости приведите расчёт и пояснение.

Ключ верных вариантов ответов

№ задания	Верный ответ / пример правильного ответа	Критерии
1	б	1 балл - выбран верный вариант; 0 баллов - остальные случаи.
2	б	1 балл - выбран верный вариант; 0 баллов - остальные случаи.
3	б	1 балл - выбран верный вариант; 0 баллов - остальные случаи.
4	б	1 балл - выбран верный вариант; 0 баллов - остальные случаи.
5	б	1 балл - выбран верный вариант; 0 баллов - остальные случаи.
6	$B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow A$	1 балл - полностью верная последовательность; 0 баллов - остальные случаи.
7	$B \rightarrow A \rightarrow C \rightarrow D$	1 балл - полностью верная последовательность; 0 баллов - остальные случаи.
8	$B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow A$	1 балл - полностью верная последовательность; 0 баллов - остальные случаи.
9	$C \rightarrow B \rightarrow A \rightarrow D$	1 балл - полностью верная последовательность; 0 баллов - остальные случаи.
10	$B \rightarrow A \rightarrow C \rightarrow D$	1 балл - полностью верная последовательность; 0 баллов - остальные случаи.
11	Необходимо проверить соответствие решения начальным условиям, области применимости модели, размерности величин и физическому смыслу результата.	1 балл - ответ содержит математически верное решение/обоснование; 0 баллов - ответ неверен или отсутствует.
12	Функцию заменяют конечным числом членов ряда Тейлора около удобной точки, оценивают погрешность и используют	1 балл - ответ содержит математически верное решение/обоснование; 0 баллов - ответ неверен или отсутствует.

	полученный многочлен для приближённого расчёта.	
13	Слишком большой шаг увеличивает погрешность и может исказить динамику процесса; уменьшение шага обычно повышает точность, но увеличивает объём вычислений.	1 балл - ответ содержит математически верное решение/обоснование; 0 баллов - ответ неверен или отсутствует.
14	Например, моделирование охлаждения детали, колебаний механической системы, изменения концентрации вещества или движения объекта под действием силы.	1 балл - ответ содержит математически верное решение/обоснование; 0 баллов - ответ неверен или отсутствует.
15	Несоответствие размерности, противоречие физическому смыслу, выход за допустимые технологические пределы, сильная зависимость от шага расчёта или некорректные начальные условия.	1 балл - ответ содержит математически верное решение/обоснование; 0 баллов - ответ неверен или отсутствует.
16	a	1 балл - выбран верный вариант; 0 баллов - остальные случаи.
17	a	1 балл - выбран верный вариант; 0 баллов - остальные случаи.
18	б	1 балл - выбран верный вариант; 0 баллов - остальные случаи.
19	б	1 балл - выбран верный вариант; 0 баллов - остальные случаи.
20	a	1 балл - выбран верный вариант; 0 баллов - остальные случаи.
21	$D \rightarrow B \rightarrow A \rightarrow C$	1 балл - полностью верная последовательность; 0 баллов - остальные случаи.
22	$B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow A$	1 балл - полностью верная последовательность; 0 баллов - остальные случаи.
23	$D \rightarrow B \rightarrow A \rightarrow C$	1 балл - полностью верная последовательность; 0 баллов - остальные случаи.
24	$B \rightarrow A \rightarrow C \rightarrow D$	1 балл - полностью верная последовательность; 0 баллов - остальные случаи.
25	$C \rightarrow D \rightarrow B \rightarrow A$	1 балл - полностью верная последовательность; 0 баллов - остальные случаи.

26	Ряд сходится, так как это p -ряд с $p = 2 > 1$.	1 балл - ответ содержит математически верное решение/обоснование; 0 баллов - ответ неверен или отсутствует.
27	Разделяем переменные: $dy/y = 2x dx$, $\ln y = x^2 + C$, $y = Ce^{x^2}$.	1 балл - ответ содержит математически верное решение/обоснование; 0 баллов - ответ неверен или отсутствует.
28	По признаку Даламбера радиус сходимости $R = 1$.	1 балл - ответ содержит математически верное решение/обоснование; 0 баллов - ответ неверен или отсутствует.
29	$k^2 - 3k + 2 = 0$; корни $k_1 = 1$, $k_2 = 2$.	1 балл - ответ содержит математически верное решение/обоснование; 0 баллов - ответ неверен или отсутствует.
30	$y_1 = y_0 + h f(x_0, y_0) = 1 + 0,1 \cdot (0+1) = 1,1$; $x_1 = 0,1$.	1 балл - ответ содержит математически верное решение/обоснование; 0 баллов - ответ неверен или отсутствует.

Типовые расчёты по дисциплине

Типовые расчёты выполняются обучающимися письменно. Типовые расчеты включают по 30 вариантов. Номер варианта определяется преподавателем или соответствует номеру обучающегося в списке группы. При оценивании учитываются правильность выбора метода, полнота решения, корректность вычислений и оформление ответа.

Критерии оценивания типовых расчётов

Оценка	Характеристика выполнения	Результат
«Зачтено»	Задания выполнены в основном верно; обучающийся правильно выбирает признаки сходимости рядов и методы решения дифференциальных уравнений, допускает отдельные вычислительные неточности, не искажающие общий результат.	Компетенции освоены на пороговом уровне и выше.
«Зачтено»	Выполнена значительная часть заданий; ход решения в целом верный, но имеются неполные обоснования или ошибки в отдельных преобразованиях.	Пороговый уровень достигнут при наличии исправляемых ошибок.
«Не зачтено»	Отсутствует понимание используемых методов; решения фрагментарны, признаки сходимости или методы интегрирования выбраны неверно, результаты не обоснованы.	Пороговый уровень не достигнут.
«Не зачтено»	Работа не представлена либо содержит только переписанные условия без самостоятельного решения.	Компетенции не подтверждены.

ТИПОВОЙ РАСЧЕТ 1 «РЯДЫ»

Цель: проверить умение исследовать числовые, знакопеременные, функциональные и степенные ряды, а также применять степенные ряды для приближённых вычислений.

В варианте необходимо выполнить все задания с подробным обоснованием выбора признаков сходимости и указанием окончательного ответа.

Вариант 1

1. Доказать сходимость ряда и найти его сумму: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.

2. Исследовать на сходимость ряды с положительными членами:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n(n+2)!}{n^5}$;

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{4n^2+1}\right)^2$;

г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+2}}$.

3. Исследовать на условную и абсолютную сходимость знакочередующийся ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{(n+1) \cdot 3^n}$.

4. Найти область сходимости рядов:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n^2+1}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-4)^{2n-1}}{2n-1}$.

5. Используя разложение подынтегральной функции в степенной ряд, вычислить указанный определенный интеграл с точностью до $\varepsilon = 0,001$:

$$\int_0^{0,25} \ln(1 + \sqrt{x}) \cdot dx.$$

Вариант 2

1. Доказать сходимость ряда и найти его сумму: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 4^n}{12^n}$.

2. Исследовать на сходимость ряды с положительными членами:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7n-1}{5^n(n+1)!}$;

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5n-1}{5n}\right)^{n^2}$;

$$в) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n+2)\ln(n+2)};$$

$$г) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^5}}.$$

3. Исследовать на условную и абсолютную сходимость знакочередующийся ряд: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{2n+1}}$.

4. Найти область сходимости рядов:

$$а) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n x^{n-1}}{2^{n-1} \cdot 3^n}; \quad б) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}.$$

5. Используя разложение подынтегральной функции в степенной ряд, вычислить указанный определенный интеграл с точностью до $\varepsilon = 0,001$:

$$\int_0^1 \operatorname{arctg}\left(\frac{x^2}{2}\right) dx.$$

Вариант 3

1. Доказать сходимость ряда и найти его сумму: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+5)(2n+7)}$.

2. Исследовать на сходимость ряды с положительными членами:

$$а) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{7}{8}\right)^n \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^7;$$

$$б) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{2n+1}\right)^n;$$

$$в) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)\ln^3(2n+1)};$$

$$г) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5n+2}.$$

3. Исследовать на условную и абсолютную сходимость знакочередующийся ряд: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\ln n}$.

4. Найти область сходимости рядов:

$$а) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n}}{8^n};$$

$$б) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{2^n}.$$

5. Используя разложение подынтегральной функции в степенной ряд, вычислить указанный определенный интеграл с точностью до $\varepsilon = 0,001$:

$$\int_0^{0,2} \sqrt{x} \cdot e^{-x} \cdot dx.$$

Вариант 4

1. Доказать сходимость ряда и найти его сумму: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 5^n}{10^n}$.

2. Исследовать на сходимость ряды с положительными членами:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) \operatorname{tg} \frac{\pi}{3^n}$;

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln(n+2))^n}$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{(4n+5)^3}}$;

г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3 + 3n}}$.

3. Исследовать на условную и абсолютную сходимость

знакопередающийся ряд: $\sum_{m=2}^{\infty} (-1)^{m+1} \cdot \frac{n}{6n+5}$.

4. Найти область сходимости рядов:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 2^n}$;

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n^2}$.

5. Используя разложение подынтегральной функции в степенной ряд, вычислить указанный определенный интеграл с точностью до $\varepsilon = 0,001$:

$$\int_0^{0,5} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} dx.$$

Вариант 5

1. Доказать сходимость ряда и найти его сумму: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+5)(n+6)}$.

2. Исследовать на сходимость ряды с положительными членами:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n/2}}{3^n}$;

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\arcsin \frac{1}{2^n} \right)^{3n}$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n+4) \ln^2(3n+4)}$;

г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 + n}}$.

3. Исследовать на условную и абсолютную сходимость

знакопередающийся ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{n^5}}$.

4. Найти область сходимости рядов:

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+8)^n}{n^2}.$$

5. Используя разложение подынтегральной функции в степенной ряд, вычислить указанный определенный интеграл с точностью до $\varepsilon = 0,001$:

$$\int_0^{0,2} \sqrt{x} \cdot \cos x \cdot dx.$$

Вариант 6

1. Доказать сходимость ряда и найти его сумму: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n - 2^n}{10^n}$.

2. Исследовать на сходимость ряды с положительными членами:

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdots (n+3)}{5 \cdot 7 \cdot 9 \cdots (2n+3)};$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2 + 5n + 8}{3n^2 - 2} \right)^n;$$

$$\text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{(7n-5)^5}};$$

$$\text{г) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+2)}.$$

3. Исследовать на условную и абсолютную сходимость знакочередующийся ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}$.

4. Найти область сходимости рядов:

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} (2+x)^n.$$

5. Используя разложение подынтегральной функции в степенной ряд, вычислить указанный определенный интеграл с точностью до $\varepsilon = 0,001$:

$$\int_0^{0,5} \ln(1+x^3) \cdot dx.$$

Вариант 7

1. Доказать сходимость ряда и найти его сумму: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+7)(2n+9)}$.

2. Исследовать на сходимость ряды с положительными членами:

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{9}{10} \right)^n \cdot n^7;$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\arcsin \frac{1}{5^n} \right)^n;$$

$$в) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{7+n}{49+n^2} \right)^2;$$

$$г). \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}.$$

3. Исследовать на условную и абсолютную сходимость знакочередующийся ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n^2}$.

4. Найти область сходимости рядов:

$$а) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{2n-1}; \quad б) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{2^n (n+3)}.$$

5. Используя разложение подынтегральной функции в степенной ряд, вычислить указанный определенный интеграл с точностью до $\varepsilon = 0,001$: $\int_0^1 x^2 \cdot \sin x \cdot dx$.

Вариант 8

1. Доказать сходимость ряда и найти его сумму: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n - 3^n}{12^n}$.

2. Исследовать на сходимость ряды с положительными членами:

$$а) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 7 \cdot 13 \cdots (6n-5)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots (n+1)};$$

$$б) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n/(n+1))^{n^2}}{2^n};$$

$$в) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-1) \ln(3n-1)};$$

$$г) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n-1}.$$

3. Исследовать на условную и абсолютную сходимость знакочередующийся ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{(2n+1) \cdot n}$.

4. Найти область сходимости рядов:

$$а) \sum_{n=1}^{\infty} (\ln x)^n; \quad б) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^n}{\sqrt[3]{n+1} \cdot \sqrt{n^2+1}}.$$

5. Используя разложение подынтегральной функции в степенной ряд, вычислить указанный определенный интеграл с точностью до $\varepsilon = 0,001$: $\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}} dx$.

Вариант 9

1. Доказать сходимость ряда и найти его сумму: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+6)(n+7)}$.

2. Исследовать на сходимость ряды с положительными членами:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n(n+1)}{5^n}$;

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln(n+1))^{2n}}$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln \frac{n+1}{n-1}$;

г) $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} \frac{\pi}{3^n}$.

3. Исследовать на условную и абсолютную сходимость

знакопередающийся ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{\sqrt{n+1}}$.

4. Найти область сходимости рядов:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$;

б) $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n (x+2)^n$.

5. Используя разложение подынтегральной функции в степенной ряд, вычислить указанный определенный интеграл с точностью до $\varepsilon = 0,001$:

$$\int_0^{0,5} \sqrt{1+x^2} \cdot dx.$$

Вариант 10

1. Доказать сходимость ряда и найти его сумму: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 5^n}{15^n}$.

2. Исследовать на сходимость ряды с положительными членами:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)!}{n^n}$;

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{5^n} \right)^{3n}$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(5n-2) \ln(5n-2)}$;

г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{n(n+1)}$.

3. Исследовать на условную и абсолютную сходимость

знакопередающийся ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n\sqrt[3]{n}}$.

4. Найти область сходимости рядов:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n}}{8^n (n^2 + 1)}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{2^n \ln(n+1)}.$$

5. Используя разложение подынтегральной функции в степенной ряд, вычислить указанный определенный интеграл с точностью до $\varepsilon = 0,001$:

$$\int_0^{0,5} \frac{dx}{1+x^5} \cdot dx.$$

Вариант 11

1. Доказать сходимость ряда и найти его сумму: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+9)(n+10)}$.

2. Исследовать на сходимость ряды с положительными членами:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \sin \frac{2\pi}{3^n};$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln(n+3))^n};$$

$$\text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6+n}{36+n^2};$$

$$\text{г) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-1}{n^2+1}.$$

3. Исследовать на условную и абсолютную сходимость знакочередующийся ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{2n+1}{n(n+1)}$.

4. Найти область сходимости рядов:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n;$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(x+10)^n}{n^n}.$$

5. Используя разложение подынтегральной функции в степенной ряд, вычислить указанный определенный интеграл с точностью до $\varepsilon = 0,001$:

$$\int_0^1 \sqrt[3]{1 + \frac{x^2}{4}} \cdot dx.$$

Вариант 12

1. Доказать сходимость ряда и найти его сумму: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n - 3^n}{15^n}$.

2. Исследовать на сходимость ряды с положительными членами:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^{n/2}}{n!};$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n^2 + 4n + 5}{6n^2 - 3n - 1} \right)^{n^2};$$

$$в) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[7]{(3+7n)^{10}}};$$

$$г) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+3)}.$$

3. Исследовать на условную и абсолютную сходимость

знакопередающийся ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{n+5}{3^n}$.

4. Найти область сходимости рядов:

$$а) \sum_{n=1}^{\infty} x^n \operatorname{tg} \frac{n}{2^n}; \quad б) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+5)^{n^2}}{(n+1)^n}.$$

5. Используя разложение подынтегральной функции в степенной ряд, вычислить указанный определенный интеграл с точностью до $\varepsilon = 0,001$:

$$\int_0^{0,5} \frac{\sin x^2}{x} \cdot dx.$$

Вариант 13

1. Доказать сходимость ряда и найти его сумму: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+7)(n+8)}$.

2. Исследовать на сходимость ряды с положительными членами:

$$а) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{5^n (n+3)!};$$

$$б) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{2n} \right)^{n^2};$$

$$в) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{(3-1)^4}};$$

$$г) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{3n^2+5}.$$

3. Исследовать на условную и абсолютную сходимость

знакопередающийся ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{n}{3n-1}$.

4. Найти область сходимости рядов:

$$а) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n x^n}{\sqrt{n}}; \quad б) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{\ln^3(n+1)}}{n+1} (x+1)^n.$$

5. Используя разложение подынтегральной функции в степенной ряд, вычислить указанный определенный интеграл с точностью до $\varepsilon = 0,001$:

$$\int_0^{0,1} \frac{e^x - 1}{x} \cdot dx.$$

Вариант 14

1. Доказать сходимость ряда и найти его сумму: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n - 7^n}{14^n}$.

2. Исследовать на сходимость ряды с положительными членами:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 6 \cdot 11 \cdots (5n - 4)}{3 \cdot 7 \cdot 11 \cdots (4n - 1)}$;

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin \frac{\pi}{n^3} \right)^{2n}$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2) \ln(n+2)}$;

г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n^2 - n + 1}$.

3. Исследовать на условную и абсолютную сходимость знакочередующийся ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1}$.

4. Найти область сходимости рядов:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! x^n}{n^n}$;

б) $\sum_{n=0}^{\infty} (2-x)^n \sin \frac{\pi}{2^n}$.

5. Используя разложение подынтегральной функции в степенной ряд, вычислить указанный определенный интеграл с точностью до $\varepsilon = 0,001$:

$$\int_0^{0,5} x^2 \cdot \cos 3x \cdot dx.$$

Вариант 15

1. Доказать сходимость ряда и найти его сумму: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)(n+3)}$.

2. Исследовать на сходимость ряды с положительными членами:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n+3)!}$;

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{4n} \right)^{3n}$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(10n+5) \ln(10n+5)}$;

г) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{2^{n-1}}$.

3. Исследовать на условную и абсолютную сходимость знакочередующиеся ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1) \cdot 3^n}$.

4. Найти область сходимости рядов:

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{5^{n+1}}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3-2x)^n}{n - \ln^2 n}.$$

5. Используя разложение подынтегральной функции в степенной ряд, вычислить указанный определенный интеграл с точностью до $\varepsilon = 0,001$:

$$\int_0^{0,5} \ln(1+x^2) \cdot dx.$$

Вариант 16

1. Доказать сходимость ряда и найти его сумму: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n - 2^n}{14^n}$.

2. Исследовать на сходимость ряды с положительными членами:

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} n^3 \cdot \operatorname{tg} \frac{2\pi}{5^n};$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{((n+1)/n)^{n^2}};$$

$$\text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[6]{(2n+3)^7}};$$

$$\text{г) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n(n+4)}.$$

3. Исследовать на условную и абсолютную сходимость знакочередующийся ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n}$.

4. Найти область сходимости рядов:

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2};$$

$$\text{б) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3n-2)(x-3)^n}{(n+1)^2 2^{n+1}}.$$

5. Используя разложение подынтегральной функции в степенной ряд, вычислить указанный определенный интеграл с точностью до $\varepsilon = 0,001$:

$$\int_0^{0,4} \sqrt{x} \cdot e^{-x/4} \cdot dx.$$

Вариант 17

1. Доказать сходимость ряда и найти его сумму: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+3)(n+4)}$.

2. Исследовать на сходимость ряды с положительными членами:

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^2+3)}{(n+1)!};$$

$$\text{б) } \sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{3}{n^2}\right);$$

$$в) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5+n}{25+n^2};$$

$$г) \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{2\pi}{3^n}.$$

3. Исследовать на условную и абсолютную сходимость знакочередующийся ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{2n+1}{n^n}$.

4. Найти область сходимости рядов:

$$а) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(0,1)^n \cdot x^{2n}}{n};$$

$$б) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^2}.$$

5. Используя разложение подынтегральной функции в степенной ряд, вычислить указанный определенный интеграл с точностью до $\varepsilon = 0,001$:

$$\int_{0,3}^{0,5} \frac{1 + \cos x}{x^2} \cdot dx.$$

Вариант 18

1. Доказать сходимость ряда и найти его сумму: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n + 5^n}{20^n}$.

2. Исследовать на сходимость ряды с положительными членами:

$$а) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(2n+3)!};$$

$$б) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n-1}{3n} \right)^{n^2};$$

$$в) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+3) \ln(n+3) \ln(\ln(n+3))};$$

$$г) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+3)}.$$

3. Исследовать на условную и абсолютную сходимость знакочередующийся ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n^2+1}$.

4. Найти область сходимости рядов:

$$а) \sum_{n=1}^{\infty} (\lg x)^n; \quad б) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{(2n-1) \cdot 2^n}.$$

5. Используя разложение подынтегральной функции в степенной ряд, вычислить указанный определенный интеграл с точностью до $\varepsilon = 0,001$:

$$\int_0^{0,5} \frac{\operatorname{arctg} x^2}{x^2} \cdot dx.$$

Вариант 19

1. Доказать сходимость ряда и найти его сумму: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+4)(n+5)}$.

2. Исследовать на сходимость ряды с положительными членами:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^n}{n!}$;

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\arcsin \frac{1}{3^n} \right)^n$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3+2n) \ln^5(3+2n)}$;

г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 3^{2n}}$.

3. Исследовать на условную и абсолютную сходимость знакочередующийся ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}}$.

4. Найти область сходимости рядов:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{5^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt[3]{n+2}}{n+1} (x-2)^n$.

5. Используя разложение подынтегральной функции в степенной ряд, вычислить указанный определенный интеграл с точностью до $\varepsilon = 0,001$:

$$\int_0^{0,8} \frac{1 - \cos x}{x} \cdot dx.$$

Вариант 20

1. Доказать сходимость ряда и найти его сумму: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n - 4^n}{20^n}$.

2. Исследовать на сходимость ряды с положительными членами:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdots (3n-1)}{3 \cdot 7 \cdot 11 \cdots (4n-1)}$;

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n} \right)^{n^2}$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[8]{(4+9n)^5}}$;

г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1) \cdot 3^n}$.

3. Исследовать на условную и абсолютную сходимость знакочередующийся ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n \cdot 5^n}$.

4. Найти область сходимости рядов:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n \cdot x^n}{(2n+1)^2 \cdot \sqrt{3^n}}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^{2n-1}}{2n \cdot 4^n}.$$

5. Используя разложение подынтегральной функции в степенной ряд, вычислить указанный определенный интеграл с точностью до $\varepsilon = 0,001$:

$$\int_0^1 \sin x^2 \cdot dx.$$

ТИПОВОЙ РАСЧЕТ 2 «ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ»

В заданиях а–е найти общее решение при заданных начальных условиях частного решения. В задании ж систему решить методом исключения.

Вариант 1

$$\begin{aligned} \text{а) } & \ln \cos y dx + x \operatorname{tg} y dy = 0; \\ \text{б) } & y' = 4 + \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2; y(1) = 2; \\ \text{в) } & (x + \sin y) dx + (x \cos y + \sin y) dy = 0; \\ \text{г) } & y' - y \operatorname{tg} x = \cos^2 x; \\ \text{д) } & (1-x^2)y'' = xy'; \\ \text{е) } & y'' + 4y' - 12y = 8 \sin 2x; y(0) = 0, y'(0) = 0; \\ \text{ж) } & \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4x + 6y; \\ \frac{dy}{dt} = 4x + 2y. \end{cases} \end{aligned}$$

Вариант 2

$$\begin{aligned} \text{а) } & 3e^x \operatorname{tg} y dx + (1 + e^x) \sec^2 y dy = 0; y(0) = \frac{\pi}{4}; \\ \text{б) } & y' = \frac{x+y}{x-y}; \\ \text{в) } & (xy + \sin y) dx + (0,5x^2 + x \cos y) dy = 0; \\ \text{г) } & y' + \frac{n}{x} y = \frac{a}{x^n}; y(1) = 0; \\ \text{д) } & 2yy'' + (y')^2 + (y')^4 = 0; \\ \text{е) } & y'' - 6y' + 9y = x^2 - x + 3; y(0) = \frac{4}{3}, y'(0) = \frac{1}{27}; \\ \text{ж) } & \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -5x - 4y; \\ \frac{dy}{dt} = -2x - 3y. \end{cases} \end{aligned}$$

Вариант 3

- а) $(1 + e^{2x})y^2 dy = e^x dx; y(0) = 0;$
б) $(x^2 + y^2)dx - xydy = 0;$
в) $(2xye^{x^2} + \ln y)dx + \left(e^{x^2} + \frac{x}{y}\right)dy = 0; y(0) = 1;$
г) $y' \cos^2 x + y = \operatorname{tg} x;$
д) $y'' + y' \operatorname{tg} x = \sin 2x;$
е) $y'' + 4y = e^{-2x}; y(0) = 0, y'(0) = 0;$
ж) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x + y; \\ \frac{dy}{dt} = 8x + y. \end{cases}$

Вариант 4

- а) $y' = 2^{x-y}; y(-3) = -5;$
б) $y' = \frac{y}{x} + \cos\left(\frac{y}{x}\right);$
в) $(y + x \ln y)dx + \left(\frac{x^2}{2y} + x + 1\right)dy = 0;$
г) $xy' + y - 3 = 0;$
д) $y'' + \left(\frac{1}{x}\right)y' = x^2;$
е) $y'' - 2y' + 5y = xe^{2x}; y(0) = 1, y'(0) = 0;$
ж) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 6x + 3y; \\ \frac{dy}{dt} = -8x - 5y. \end{cases}$

Вариант 5

- а) $\frac{y}{y'} = \ln y; y(2) = 1;$
б) $xyy' = y^2 + 2x^2;$
в) $ye^x dx + (y + e^x)dy = 0;$
г) $y' - \frac{y}{\sin x} = \cos^2 x \operatorname{tg} \frac{x}{2};$
д) $1 + (y')^2 + yy'' = 0;$
е) $y'' + 5y' + 6y = 12 \cos 2x; y(0) = 1, y'(0) = 3;$
ж) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x + 5y; \\ \frac{dy}{dt} = x + 3y. \end{cases}$

Вариант 6

- а) $\frac{xdy}{\sqrt{1-y^2}} + \frac{ydx}{\sqrt{1-x^2}} = 0$;
- б) $xy' = xe^{y/x} + y$; $y(1) = 0$;
- в) $(e^x \sin y + x)dx + (e^x \cos y + y)dy = 0$;
- г) $y' \cos x + y = 1 - \sin x$;
- д) $y''(1+y) - 5(y')^2 = 0$;
- е) $y'' - 5y' + 6y = (12x - 7)e^{-x}$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$;
- ж) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - 2y; \\ \frac{dy}{dt} = 2x + 8y. \end{cases}$

Вариант 7

- а) $yy' = -2x \sec y$;
- б) $xy' - y = x \operatorname{tg}(y/x)$; $y(1) = \frac{\pi}{2}$;
- в) $(3x^2y + \sin x)dx + (x^3 - \cos y)dy = 0$;
- г) $y'\sqrt{1-x^2} + y = \arcsin x$; $y(0) = 0$;
- д) $xy'' + 2y' = x^3$;
- е) $y'' - 4y' + 13y = 26x + 5$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$;
- ж) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -4x - 6y, \\ \frac{dy}{dt} = -4x - 2y. \end{cases}$

Вариант 8

- а) $\frac{dx}{x(y-1)} + \frac{dy}{y(x+2)} = 0$; $y(1) = 1$.
- б) $xy' \ln(y/x) = x + y \ln(y/x)$.
- в) $(y + e^x \sin y)dx + (x + e^x \cos y)dy = 0$.
- г) $(1 + x^2)y' + y = \operatorname{arctg} x$.
- д) $y'' \operatorname{tg} y = 2(y')^2$.
- е) $y'' - 4y' = 6x^2 + 1$; $y(0) = 2$, $y'(0) = 3$.
- ж) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -5x - 8y, \\ \frac{dy}{dt} = -3x - 3y. \end{cases}$

Вариант 9

- а) $\sec^2 x \operatorname{tg} y dx + \sec^2 y \operatorname{tg} x dy = 0$; $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$;
- б) $xy + y^2 = (2x^2 + xy)y'$;

$$в) \left(\frac{y}{y^2 + x^2} - y \right) dx + \left(e^y - x - \frac{x}{x^2 + y^2} \right) dy = 0;$$

$$г) xy' - y = x^2 \cos x;$$

$$д) y'' - 2y'tg x = \sin x;$$

$$е) y'' - 2y' + y = 16e^x; y(0) = 1, y'(0) = 2;$$

$$ж) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x - 5y, \\ \frac{dy}{dt} = -7x - 3y. \end{cases}$$

Вариант 10

$$а) 5e^x tg y dx + (1 - e^x) \sec^2 y dy = 0;$$

$$б) xy' \sin\left(\frac{y}{x}\right) + x = y \sin\left(\frac{y}{x}\right);$$

$$в) (\ln y - 5y^2 \sin 5x) dx + \left(\frac{x}{y} + 2y \cos 5x \right) dy = 0; y(0) = e;$$

$$г) y' + 2xy = xe^{-x^2};$$

$$д) 3yy'' + (y')^2 = 0;$$

$$е) y'' + 6y' + 9y = 10e^{-3x}; y(0) = 3, y'(0) = 2;$$

$$ж) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -7x + 5y, \\ \frac{dy}{dt} = 4x - 8y. \end{cases}$$

Вариант 11

$$а) y' + \sin(x + y) = \sin(x - y);$$

$$б) (4xy + 3y^2) dx + (2x^2 + 6xy + 3y^2) dy = 0; y(0) = 1;$$

$$в) x(x + 2y) dx + (x^2 - y^2) dy = 0;$$

$$г) y' + \frac{x}{1 - x^2} y = 1;$$

$$д) x^3 y'' + x^2 y' = 1;$$

$$е) y'' + 4y = \cos 2x; y(0) = y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0;$$

$$ж) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 4y, \\ \frac{dy}{dt} = x + y. \end{cases}$$

Вариант 12

$$а) y' = e^{x+y} + e^{x-y}; y(0) = 0;$$

$$б) (2xy + y^2) dx + (2xy + x^2) dy = 0;$$

$$в) (y^3 - 2xy) dx + (3xy^2 - x^2) dy = 0;$$

$$г) x^2 y' = 2xy + 3;$$

д) $yy'' + y'^2 = 0$;

е) $2y'' - y' = 1$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$;

ж)
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x + y, \\ \frac{dy}{dt} = -4x - y. \end{cases}$$

Вариант 13

а) $x(y^6 + 1)dx + y^2(x^4 + 1)dy = 0$; $y(0) = 1$;

б) $xdy - ydx = ydy$;

в) $(\cos x + x \cos y + e^y)dy + (\sin y - y \sin x)dx = 0$;

г) $xy' + y - x - 1 = 0$;

д) $y'' + y'tgx = \sin 2x$;

е) $y'' - 8y' + 16y = e^{4x}$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$;

ж)
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 2y, \\ \frac{dy}{dt} = x - y. \end{cases}$$

Вариант 14

а) $x\sqrt{1+y^2}dx + y\sqrt{1+x^2}dy = 0$;

б) $xy' - y + xtg \frac{y}{x} = 0$;

в) $(e^{x+y} + 3x^2)dx + (e^{x+y} + 4y^3)dy = 0$; $y(0) = 0$;

г) $x^2y' = 2xy + 3$;

д) $y''x \ln x = y'$;

е) $y'' + y = \cos 3x$; $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4$, $y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$;

ж)
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - y, \\ \frac{dy}{dt} = x + 3y. \end{cases}$$

Вариант 15

а) $y' + \cos(x + 2y) = \cos(x - 2y)$; $y(0) = \frac{\pi}{4}$;

б) $(x^2 + y^2 + xy)dx = x^2dy$;

в) $(x^2 + y^2 + y)dx + (2xy + x + e^y)dy = 0$; $y(0) = 0$;

г) $(1 + x^2)y' - 2xy = (1 + x^2)^2$;

д) $y'' + 2xy'^2 = 0$;

е) $y'' - 4y' + 3y = e^{5x}$; $y(0) = 3$, $y'(0) = 9$;

$$\text{ж) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 8y - x, \\ \frac{dy}{dt} = x + y. \end{cases}$$

Вариант 16

а) $\sqrt{5+y^2} + y'y\sqrt{1-x^2} = 0;$

б) $xy' = 3\sqrt{x^2+y^2} + y;$

в) $y' + \frac{y}{x} = 3x, \quad y(1) = 1;$

г) $\left(xe^x + \frac{y}{x^2}\right)dx - \frac{1}{x}dy = 0;$

д) $2xy'' = y';$

е) $y'' + 2y' + 5y = -17\sin 2x;$

$$\text{ж) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - y, \\ \frac{dy}{dt} = 4x - y. \end{cases}$$

Вариант 17

а) $6xdx - ydy = yx^2dy - 3xy^2dx;$

б) $2y' = \frac{y^2}{x^2} + 8\frac{y}{x} + 8;$

в) $y' - \frac{2xy}{1+x^2} = 1+x^2, \quad y(1) = 3;$

г) $\left(10xy - \frac{1}{\sin y}\right)dx + \left(5x^2 + \frac{x\cos y}{\sin^2 y} - y^2\sin y^3\right)dy = 0;$

д) $\operatorname{tg}x y'' - y' + \frac{1}{\sin x} = 0;$

е) $y'' + 6y' + 13y = e^{-3x} \cos x;$

$$\text{ж) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x + y, \\ \frac{dy}{dt} = x + 3y. \end{cases}$$

Вариант 18

а) $y \ln y + xy' = 0;$

б) $xy' = \frac{3y^3 + 10yx^2}{2y^2 + 5x^2};$

в) $y' - \frac{1+2x}{x^2}y = 1, \quad y(1) = 1;$

г) $\left(\frac{y}{x^2+y^2} + e^x\right)dx - \frac{xdy}{x^2+y^2} = 0;$

д) $xy'' + y' = 1;$

$$е) y'' - 4y' + 8y = e^x(3 \sin x + 5 \cos x);$$

$$ж) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 4y, \\ \frac{dy}{dt} = x + y. \end{cases}$$

Вариант 19

$$а) (1 + e^x)y' = ye^x;$$

$$б) y' = \frac{x^2 + 3xy - y^2}{3x^2 - 2xy};$$

$$в) y' + \frac{3y}{x} = \frac{2}{x^3}, y(1) = 1;$$

$$г) e^y dx + (\cos y + xe^y) dy = 0;$$

$$д) xy'' + y' = x + 1;$$

$$е) y'' + 2y' = 6e^x(\sin x + \cos x);$$

$$ж). \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -3x + 2y, \\ \frac{dy}{dt} = -2x + y. \end{cases}$$

Вариант 20

$$а) \sqrt{1 - x^2}y' + xy^2 + x = 0;$$

$$б) xy' = 3\sqrt{2x^2 + y^2} + y;$$

$$в) y' + 2xy = -2x^3, y(1) = e^{-1};$$

$$г) (y^3 + \cos x)dx + (3xy^2 + e^y)dy = 0;$$

$$д) y'' \operatorname{tg} 5x = 5y';$$

$$е) y'' - 4y' + 4y = -e^{2x} \sin 4x;$$

$$ж) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 5x + 4y, \\ \frac{dy}{dt} = -2x + 11y. \end{cases}$$

3.2. Задания для промежуточной аттестации

Контрольные вопросы к зачёту

1. Числовые ряды: основные понятия, частичные суммы, сходимость и сумма ряда.
2. Свойства сходящихся числовых рядов.
3. Необходимый признак сходимости числового ряда.
4. Геометрический ряд и условия его сходимости.
5. Гармонический ряд и его расходимость.
6. Признаки сравнения для рядов с положительными членами.
7. Признак Даламбера и примеры его применения.
8. Радиальный признак Коши.

9. Интегральный признак сходимости числовых рядов.
10. Знакопередающиеся ряды. Признак Лейбница.
11. Абсолютная и условная сходимость знакопеременных рядов.
12. Функциональные ряды. Область сходимости.
13. Степенные ряды. Радиус и интервал сходимости.
14. Ряды Тейлора и Маклорена. Основные разложения элементарных функций.
15. Приближённые вычисления с использованием степенных рядов.
16. Разложение периодических функций в ряд Фурье.
17. Практический гармонический анализ и его инженерный смысл.
18. Дифференциальные уравнения: основные понятия, порядок, общее и частное решение.
19. Задача Коши. Формулировка теоремы существования и единственности.
20. Уравнения первого порядка с разделяющимися переменными.
21. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка.
22. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка.
23. Уравнение Бернулли.
24. Уравнения в полных дифференциалах.
25. Дифференциальные уравнения высших порядков. Основные понятия.
26. Уравнения, допускающие понижение порядка.
27. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.
28. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида.
29. Системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.
30. Метод Эйлера для приближённого решения дифференциального уравнения первого порядка.
31. Метод Эйлера для систем дифференциальных уравнений.
32. Интегрирование дифференциальных уравнений при помощи степенных рядов.

Примерные практические задания для зачёта

Практическое задание включается в билет к зачёту наряду с теоретическими вопросами. Обучающийся должен записать ход решения, обосновать выбор метода и сформулировать ответ.

№	Практическое задание	Проверяемый раздел
1	Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n/2}}{3^n}$;	Ряды
2	Исследовать на сходимость ряд с положительными членами: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdots (n+3)}{5 \cdot 7 \cdot 9 \cdots (2n+3)}$;	Ряды

3	Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}$.	Ряды
4	Найти радиус и интервал сходимости ряда $\sum (x-1)^n / (n \cdot 3^n)$.	Ряды
5	Разложить функцию $\ln(1+x)$ в ряд Маклорена и указать область применимости разложения.	Ряды
6	Вычислить приближённо интеграл $\int_0^2 e^{-x^2} dx$ с использованием степенного ряда.	Ряды
7	Найти первые три ненулевых члена ряда Маклорена для функции $\sin(2x)$.	Ряды
8	Решить дифференциальное уравнение $y' = 3x^2y$.	Дифференциальные уравнения
9	Решить задачу Коши $y' + y = x$, $y(0)=1$.	Дифференциальные уравнения
10	Решить однородное дифференциальное уравнение $y' = (x+y)/x$.	Дифференциальные уравнения
11	Проверить, является ли уравнение $(2xy+1)dx + (x^2+2y)dy = 0$ уравнением в полных дифференциалах, и решить его.	Дифференциальные уравнения
12	Решить ЛОДУ второго порядка $y'' - 4y' + 4y = 0$.	Дифференциальные уравнения
13	Найти общее решение уравнения $y'' + y = \cos x$.	Дифференциальные уравнения
14	Выполнить два шага метода Эйлера для $y' = x+y$, $y(0)=1$ при $h=0,1$.	Дифференциальные уравнения
15	Решить систему $x'=x+y$, $y'=x-y$ методом исключения.	Дифференциальные уравнения

Примерная структура билета к зачёту

Элемент билета	Содержание
Теоретический вопрос 1	Вопрос по разделу «Ряды»
Теоретический вопрос 2	Вопрос по разделу «Дифференциальные уравнения»
Практическое задание	Практическая задача из перечня примерных заданий: исследование ряда, нахождение области сходимости, приближённое вычисление с помощью ряда, решение дифференциального уравнения или системы.

Критерии промежуточной аттестации

«Зачтено» выставляется, если обучающийся раскрывает содержание теоретических вопросов, владеет базовыми определениями и методами дисциплины, выполняет практическое задание

без принципиальных ошибок, демонстрирует понимание области применимости метода и способен пояснить полученный результат.

«Не зачтено» выставляется, если обучающийся не раскрывает основные понятия, не умеет применять признаки сходимости или методы решения дифференциальных уравнений, допускает грубые ошибки в вычислениях и не может объяснить смысл полученного результата.

Примерные билеты к зачёту (Полный комплект билетов хранится на кафедре ФМД)

Билет 1

1. Числовой ряд. Сходимость и сумма ряда. Необходимый признак сходимости числового ряда.
2. Дифференциальные уравнения первого порядка. Общее и частное решение. Задача Коши.
3. Практическое задание: исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

Билет 2

1. Геометрический ряд. Условия его сходимости и формула суммы.
2. Уравнения с разделяющимися переменными. Метод решения.
3. Практическое задание: найти общее решение дифференциального уравнения $y' = xy$

Билет 3

1. Ряды с положительными членами. Признак сравнения.
2. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка. Подстановка ($y=ux$).
3. Практическое задание: исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{x^3+1}$

Билет 4

1. Признак Даламбера для исследования сходимости числовых рядов.
2. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка. Общий вид и метод решения.
3. Практическое задание: решить задачу Коши $y' = 2xy$? $y(0)=1$

Билет 5

1. Радикальный признак Коши для исследования сходимости рядов.
2. Дифференциальные уравнения в полных дифференциалах. Условие точности.
3. Практическое задание: исследовать на сходимость ряд