**Министерство образования и науки Российской Федерации**
**Федеральное государственное бюджетное**
**образовательное учреждение**
**высшего профессионального образования**
**«Заполярный государственный университет им. Н.М. Федоровского»**
**Политехнический колледж**

# Комплект
# контрольно-оценочных средств
# учебной дисциплины

Основы математического анализа
основной образовательной программы (ППССЗ)
по специальностям среднего профессионального образования (СПО)
13.02.01 Тепловые электрические станции

2025

Комплект контрольно-оценочных средств учебной дисциплины Основы математического анализа разработан на основе актуализированного Федерального государственного образовательного стандарта (далее ФГОС) среднего профессионального образования по специальностям:
13.02.01 Тепловые электрические станции

Организация-разработчик: Политехнический колледж ФГБОУ ВПО «Заполярный государственный университет им. Н.М. Федоровского»

Разработчик:
М.В. Олейник, преподаватель высшей квалификационной категории

Рассмотрен на заседании предметной комиссии естественнонаучных и горных дисциплин

Председатель комиссии М.В. Олейник

Утвержден методическим советом политехнического колледжа ФГБОУ ВПО «Заполярный государственный университет им. Н.М. Федоровского»

Протокол заседания методического совета №3 от «22» 01 2025 г.

Зам. директора по УР А.В. Петухова

СОДЕРЖАНИЕ

## 1 Паспорт комплекта контрольно-оценочных средств (КОС)

### 1.1 Формируемые компетенции

КОС предназначены для контроля и оценки образовательных достижений обучающихся, освоивших программу учебной дисциплины Основы математического анализа.

КОС включают контрольные материалы для проведения текущего, рубежного контроля и промежуточной аттестации в форме зачета.

В результате освоения учебной дисциплины Основы математического анализа обучающийся должен обладать предусмотренными ФГОС следующими умениями, знаниями, которые формируют общие компетенции:

ОК 01. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам;

ОК 02. Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации, и информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности;

ОК 03. Планировать и реализовывать собственное профессиональное и личностное развитие, предпринимательскую деятельность в профессиональной сфере, использовать знания по правовой и финансовой грамотности в различных жизненных ситуациях;

ОК 04. Эффективно взаимодействовать и работать в коллективе и команде

ОК 05. Осуществлять устную и письменную коммуникацию на государственном языке Российской Федерации с учетом особенностей социального и культурного контекста;

ОК 06. Проявлять гражданско-патриотическую позицию, демонстрировать осознанное поведение на основе традиционных российских духовно-нравственных ценностей, в том числе с учетом гармонизации межнациональных и межрелигиозных отношений, применять стандарты антикоррупционного поведения.

## 2 Контроль и оценка освоения учебной дисциплины по темам (разделам)

### 2.1 Формы и методы оценивания

При изучении учебной дисциплины предусмотрены следующие виды текущего контроля знаний, обучающихся:

тесты – контроль, проводимый после изучения материала, предполагает выбор и обоснование правильного ответа на вопрос;

устный опрос – контроль, проводимый после изучения материала в виде ответов на вопросы, позволяет не только проконтролировать знание темы урока, но и развивать навыки свободного общения, правильной устной речи;

письменный контроль – выполнением практических заданий по отдельным темам, позволяет выявить уровень усвоения теоретического материала и умение применять полученные знания на практике.

Итоговый контроль по дисциплине проводится в форме экзамена.

Таблица 3 – Критерии оценки проверяемых умений

| № | Тип (вид) задания | Проверяемые знания и умения | Критерии оценки |
|---|---|---|---|
| 1 | Тесты | Знание свойств степеней с действительным показателем; правил вычисления пределов функции в точке, на бесконечности; основ математического анализа; формул вычисления расстояния между двумя точками, координат середины отрезка; длина вектора, модуль вектора, вычисления угла между векторами | «5» - 100 – 90% правильных ответов<br>«4» - 89 – 80% правильных ответов<br>«3» - 79 – 70% правильных ответов<br>«2» - 69% и менее правильных ответов |
| 2 | Математи-ческий диктант | Знание таблицы значений тригонометрических функций; основных тригонометрических тождеств; формул приведения; таблиц производных, правил дифференцирования; формул объема тел и поверхностей вращения | «5» - 100 – 90% правильных ответов<br>«4» - 89 – 80% правильных ответов<br>«3» - 79 – 70% правильных ответов<br>«2» - 69% и менее правильных ответов |
| 3 | Устный опрос | Знание правил нахождения пределов функции, определения производной; алгоритмов вычисления площадей криволинейных трапеций | За правильный ответ ставится положительная оценка |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 4 | Реферат | Знание правил оформления рефератов | «5» – выполнены все требования к написанию и защите реферата: обозначена проблема и обоснована ее актуальность, сформулированы выводы, тема раскрыта полностью, соблюдены требования к внешнему оформлению;<br>«4» –имеются неточности в изложении материала; отсутствует логическая последовательность в суждениях; имеются упущения в оформлении;<br>«3» – имеются существенные отступления от требований к реферированию. В частности: тема освещена лишь частично; допущены фактические ошибки в содержании реферата или при ответе на дополнительные вопросы; во время защиты отсутствует вывод;<br>«2» – тема реферата не раскрыта, обнаруживается существенное непонимание проблемы, реферат не представлен. |

Таблица 4 – Контроль и оценка освоения учебной дисциплины по темам (разделам)

| **Элемент учебной дисциплины** | **Рубежный контроль** | | | |
|---|---|---|---|---|
| | **Форма контроля** | **Форма контроля** | **Форма контроля** | **Проверяемые** ***ОК, У*** |
| **Раздел 1. Введение в анализ** | | | **зачет** | ***ОК1 – ОК7*** |
| Тема 1.1. Дифференциальное и интегральное исчисление | *Устный опрос* <br> *Практическая работа №1* <br> *Практическая работа №2* | *Самостоятельная работа* | | |
| Тема 1.2. Комплексные числа | *Устный опрос* <br> *Практическая работа №3* | *Самостоятельная работа* | | |
| Тема 1.3 Ряды. | *Устный опрос* <br> *Практическая работа №4* | *Самостоятельная работа* | | |
| Тема 1.4 Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных | *Устный опрос* <br> *Тестирование* | *Самостоятельная работа* | | |
| Тема 1.5. Обыкновенные дифференциальные уравнение | *Устный опрос* <br> *Практическая работа №5* | *Самостоятельная работа* | | |
| **Раздел 2. Дискретная математика** | | | | |
| Тема 2.1 Множества и отношения. Свойства отношений. Операции над множествами | *Практическая работа №6* | | | |
| **Раздел 3. Численные методы** | | | | |
| Тема 3.1 Численное интегрирование | *Практическая работа №7* | *Самостоятельная работа* | | |
| Тема 3.2. Численное дифференцирование | *Практическая работа №8* <br> *Устный опрос* | *Самостоятельная работа* | | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **Раздел 4. Теория вероятности и математическая статистика** | | | | |
| Тема 4.1. Теория вероятностей | *Устный опрос*<br>*Практическая работа №9* | *Самостоятельная работа* | | |
| Тема 4.2. Математическая статистика | *Практическая работа №10*<br>*Устный опрос* | *Самостоятельная работа* | | |

### 3 Задания для оценки освоения учебной дисциплины

### Раздел 1. Введение в анализ

### Тема 1.1. Дифференциальное и интегральное исчисление

Производная функции. Понятие дифференциала функции и его свойства

***Сведения из теории:***

**Таблица производных.**

| **Простые функции.** | **Сложные функции.** |
|---|---|
| 1. $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$ | 1. $(U^n)' = n \cdot U^{n-1} \cdot U'$ |
| 2. $(c)' = 0, \text{c} - \text{постоянная}$ | 2. $(c)' = 1, \quad \text{c} - \text{постоянная}$ |
| 3. $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ | 3. $\left(\sqrt{U}\right)' = \frac{U'}{2\sqrt{U}}$ |
| 4. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ | 4. $(\ln U)' = \frac{1}{U} \cdot U'$ |
| 5. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$ | 5. $(\log_a U)' = \frac{U'}{U \cdot \ln a}$ |
| 6. $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$ | 6. $(U^x)' = U^x \cdot \ln U \cdot U'$ |
| 7. $(e^x)' = e^x$ | 7. $(e^U)' = e^U \cdot U'$ |
| 8. $(\sin x)' = \cos x$ | 8. $(\sin U)' = \cos U \cdot U'$ |
| 9. $(\cos x)' = -\sin x$ | 9. $(\cos U)' = -\sin U \cdot U'$ |
| 10. $(\tan x)' = \frac{1}{cos^2 x}$ | 10. $(\tan U)' = \frac{U'}{cos^2 U}$ |
| 11. $(ctgx)' = -\frac{1}{sin^2 x}$ | 11. $(ctgU)' = -\frac{U'}{sin^2 U}$ |
| 12. $(arcsinx)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | 12. $(arcsinU)' = \frac{U'}{\sqrt{1-U^2}}$ |
| 13. $(arccosx)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | 13. $(arccosU)' = -\frac{U'}{\sqrt{1-U^2}}$ |
| 14. $(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$ | 14. $(arctgU)' = \frac{U'}{1+U^2}$ |
| 15. $(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$ | 15. $(arcctgU)' = -\frac{U'}{1+U^2}$ |

**Правила вычисления.**

1. $\left(U(x) \pm V(x)\right)' = U'(x) \pm V'(x)$

   $(U \pm V)' = U' \pm V'$
2. $[U(x) \cdot V(x)]' = U'(x) \cdot V(x) + U(x) \cdot V'(x)$

   $[U \cdot V]' = U' \cdot V + U \cdot V'$
3. $\left(af(x)\right)' = a \cdot f'(x)$, a – const
4. 

5. $\left(\frac{U(x)}{V(x)}\right)' = \frac{U'(x)\cdot V(x) - U(x)\cdot V'(x)}{\left(V(x)\right)^2}, \quad V(x) \neq 0$

6. $\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'\cdot V - U\cdot V'}{(V)^2} \qquad \mathrm{V} \neq 0$

Производные высших порядков.

По определению, вторая производная функции $y = f(x)$ равна производной от ее (первой) производной $y'$, т.е. $y'' = (f'(x))'$ и вообще, *n-й* производной функции называется производная от ее *(n – 1)-й* производной $y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)'$.

***Пример 1.***

Найти вторую производную функции $y = x^4 \cdot \sin 2x$

Решение:

1) Найдем первую производную функции

$$y' = \left(x^4 \sin 2x\right)' = \left(x^4\right)' \cdot \sin 2x + x^4\left(\sin 2x\right)' = 4x^3 \cdot \sin 2x + 2x^4 \cdot \cos 2x =$$
$$= 2x^3\left(2\sin 2x + x\cos 2x\right)$$

2) Найдем вторую производную

$$y'' = (2x^3(2\sin 2x + x\cos 2x))' = \left(2x^3\right)' \cdot \left(2\sin 2x + x\cos 2x\right) + 2x^3\left(2\sin 2x + x\cos 2x\right)' =$$
$$= 6x^2\left(2\sin 2x + x\cos 2x\right) + 2x^3\left(4\cos 2x + \cos 2x - 2x\sin 2x\right) = 2x^2(6\sin 2x + 3x\cos 2x +$$
$$4x\cos 2x + x\cos 2x - 2x\sin 2x) = 4x^2((3-x)\sin 2x + 4x\cos 2x)$$

Ответ: $y'' = 4x^2((3-x)\sin 2x + 4x\cos 2x)$

***Пример 2***

Найти производную 4-го порядка функции $y = \sin 2x$

***Решение:***

$$y' = \left(\sin 2x\right)' = \cos 2x \cdot (2x)' = 2\cos 2x$$
$$y'' = (2\cos 2x)' = -2\sin 2x \cdot (2x)' = -4\sin 2x$$
$$y''' = (-4\sin 2x)' = -4\cos 2x \cdot (2x)' = -8\cos 2x$$
$$y^{(4)} = (-8\cos 2x)' = 8\sin 2x \cdot (2x)' = 16\sin 2x$$

***Задания для самостоятельного решения:***

Найдите производную указанного порядка следующих функций:

1. $y = 5x^3 + 2x^2 + 1$, найти $y'''$;
2. $y = \sin 3x$, найти $y''$;
3. $y = tg^2 x$, найти $y'''$;
4. $y = \sin x + \cos x$, найти $y'''$;
5. $y = x^4 + 2x^3 - x^2 + 4$, найти $y''$;
6. $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2$, найти $y'''$;
7. $y = \frac{x^2}{1-x}$, найти $y''$;
8. $y = x^2 \cdot \ln x$, найти $y'''$

***Контрольные вопросы:***

1) Знание значение производных некоторых табличных функций.
2) Правила вычисления производных.
3) Что называется производной высших порядков?

**Тема: Геометрические приложения определенных интегралов**
***Сведения из теории:***

## Таблица интегралов.

| | |
|---|---|
| 1. $\int dx = x + C$ | 8. $\int \cos x dx = \sin x + C$ |
| 2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ | 9. $\int \frac{dx}{cos^2 x} = tgx + C$ |
| 3. $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$ | 10. $\int \frac{dx}{sin^2 x} = -ctgx + C$ |
| 4. $\int e^x dx = e^x + C$ | 11. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = arcsinx + C$ |
| 5. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ | 12. $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + C$ |
| 6. $\int \sin x dx = -\cos x + C$ | 13. $\int \cos nx dx = \frac{1}{n} \sin nx + C$ |
| 7. $\int \sin nx dx = -\frac{1}{n} \cos nx + C$ | |

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b \qquad (2.1)$$

Формула (2.1) называется формулой Ньютона - Лейбница

Приложение определенного интеграла к вычислению площадей и объемов.

***Пример 3***

Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^3$ и $y = \sqrt[3]{x}$

***Решение:***

Рассмотрим искомую фигуру (рис. 2.1)

В силу симметрии, достаточно подсчитать площадь S части фигуры, лежащей в первом квадранте, а затем результат удвоить. Система уравнений

$$\begin{cases} y = x^3, \\ y = \sqrt[3]{x} \end{cases}$$

Имеет решения $x_1 = 0,\ \ y_1 = 0,$ и

$x_2 = 1,\ \ y_2 = 1$

Площадь S получается как разность площадей двух криволинейных трапеций

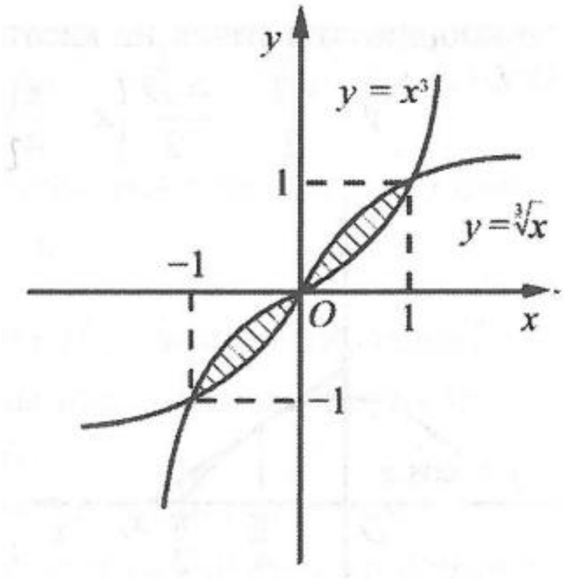



Рис. 2.1

$$S = \int_0^1 \sqrt[3]{x}dx - \int_0^1 x^3 dx = \int_0^1 x^{1/3} dx - \frac{x^4}{4}\Big|_0^1 = \frac{3}{4}x^{4/3}\Big|_0^1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

Ответ: 1 кв. ед.

***Пример 4***

Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \cos x\left(0 \le x \le \frac{\pi}{2}\right),\ y = 0,\ \ x = 0$ и прямой , являющейся касательной к линии $y = \cos x$ в точке $x = \frac{\pi}{4}$.

***Решение:***

Составим уравнение касательной: так как $y' = -\sin x$ , $y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$,

$y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, то координаты точек на касательной удовлетворяют уравнению $y - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{-\sqrt{2}}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x + \left(\frac{\sqrt{2}\pi}{8} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ .

Данные линии образуют заштрихованную фигуру на рис. 2.2.

Найдем точку $x_0$ пересечения касательной с осью $Ox$ :

$$-\frac{\sqrt{2}}{2}x_0+\frac{\sqrt{2}}{8}\pi+\frac{\sqrt{2}}{2}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_0=\frac{\pi}{4}+1 .$$

Искомую площадь $S$ находим как сумму площадей двух составляющих ее частей

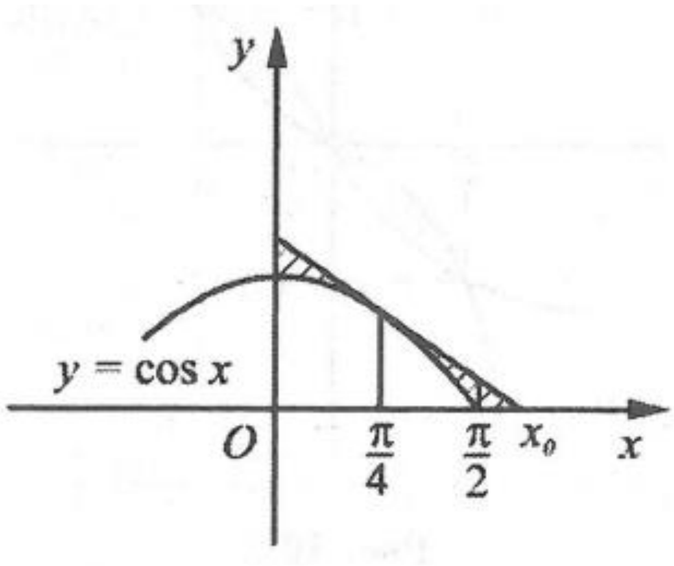



Рис. 2.2

$$S=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}x+\left(\frac{\sqrt{2}}{8}\pi+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\ x dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\left(\pi/4\right)+1}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}x_0+\left(\frac{\sqrt{2}}{8}\pi+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)=-\frac{\sqrt{2}}{4}x^2\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+$$

$$+\left(\frac{\sqrt{2}}{8}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\sin\ x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{\sqrt{2}}{4}x^2\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{(\frac{\pi}{4})+1}+\left(\frac{\sqrt{2}\pi}{8}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{(\frac{\pi}{4})+1}=-\frac{\sqrt{2}}{4}\frac{\pi^2}{4}+\frac{\sqrt{2}\pi}{8}\cdot\frac{\pi}{2}+$$

$$+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\pi}{2}-1-\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\left(\frac{\pi}{4}+1\right)^2-\frac{\pi^2}{4}\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\pi}{4}+1\right)\left(1-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{4}\pi-1-\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\frac{\pi^2}{16}+\frac{\pi}{2}+1-\frac{\pi^2}{4}\right)+$$

$$+\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1-\frac{\pi^2}{16}\right)=\frac{\left(4\sqrt{2}-16+\pi\sqrt{2}\right)}{16}$$

Ответ: $\frac{\left(4\sqrt{2}-16+\pi\sqrt{2}\right)}{16}$ кв. ед.

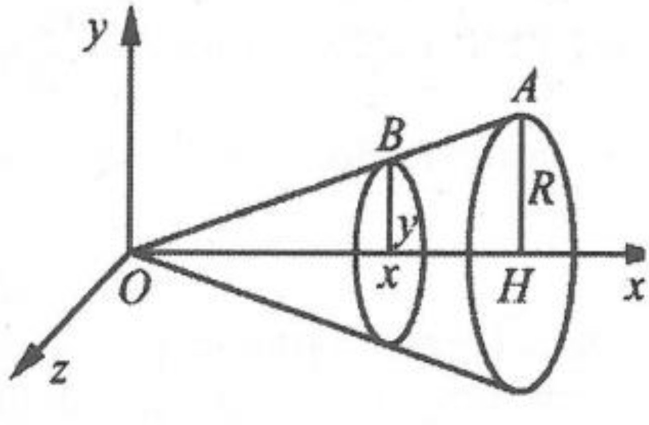
***Пример 5***

Методом интегрального исчисления доказать, что объём конуса вычисляется по формуле $V=\frac{1}{3}\pi R^2 H$ , где $R$ – радиус основания, $H$ – высота конуса.

***Решение:***

Применим формулу для вычисления объема тела, полученного при вращении криволинейной трапеции вокруг оси $Ox$ (рис. 2.3)

$$V = \pi \int_0^H y^2(x)dx \qquad (2.1)$$




Из подобия треугольников $OAH$ и $OBx$ имеем:

$$\frac{OH}{Ox} = \frac{R}{y} \Leftrightarrow y = \frac{Ox \cdot R}{OH}$$

Но $OH = H$ ($H$ – высота конуса), $Ox = x$ ($x$ – абсцисса поперечного сечения конуса). Следовательно,

$$y = \frac{R}{H}x, \text{ откуда } y^2 = \frac{R^2}{H^2}x^2.$$

Подставив в формулу (2.1), после очевидных преобразований будем иметь

$$V = \pi \int_0^H \frac{R^2}{H^2} x^2(x)dx = \pi \frac{R^2}{H^2} \frac{x^3}{3}\Big|_0^H = \frac{\pi R^2 H}{3}$$

***Задания для самостоятельного решения:***

1. Вычислите площадь фигуры, ограниченной заданными линиями:

1) $y = 3x - x^2$, $y = 0$

2) $y = x^2$, $x + y = 2$

3) $y = 6x - x^2$, $y = 0$

4) $y = \sin x$, $y = 0$, $x \in [0., \pi]$

5) $y = \frac{2}{x}$, $y = 3 - x$

2. Докажите, что объем пирамиды вычисляется по формуле $V = \frac{1}{3} S_0 \cdot H$, где $S_0$ - площадь основания, $H$ – высота пирамиды.

3. Докажите, что объем призмы находится по формуле $V = S_0 \cdot H$, где $S_0$ - площадь основания, $H$ – высота призмы.

4. Докажите, что объем цилиндра вычисляется по формуле $V = \pi R^2 H$, где $R$ - радиус основания, $H$ – высота цилиндра.

5. Найдите объем тела, полученного вращением криволинейной трапеции, ограниченной линиями $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = e^x$.

***Контрольные вопросы:***

1. Формулы интегрирования.
2. Приведите примеры приложения определенного интеграла.

## Тема 1.2. Комплексные числа

**Тема: Действия над комплексными числами, заданными в тригонометрическом виде.**

***Сведения из теории:***

Ели на плоскости выбрать прямоугольную систему координат *Oxy*, то каждое комплексное число можно изобразить точкой с координатами $a$ и $b$. Всякое комплексное число $z$ может быть представлено в тригонометрической форме.

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \quad r \geq 0.$$

Число $r$ является модулем, а угол $\varphi$ называется аргументом комплексного числа $z$.

Если $z = a + bi$, то $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\cos\varphi = \frac{a}{r}$, $\sin\varphi = \frac{b}{r}$.

Для модулей двух произвольных комплексных чисел справедливо неравенства

$$|z_1| - |z_2| \leq |z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

Комплексные числа $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ и $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ (заданные в тригонометрической форме) умножаются и делятся соответсвенно по формулам

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)).$$

Если $n \in Z$, то $z^n = (r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$.

Равенство $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi$ называется формулой Муавра.

Извлечение корня $n$-й степени из комплексного числа $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \quad r \geq 0$, дает n различных значений, которые можно найти по формуле

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi\kappa}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi\kappa}{n}\right),$$

где $r \in R, \ \kappa = 0,1,..., n-1$.

***Задания для самостоятельного решения:***

1 Запишите комплексные числа в тригонометрической форме

| | | |
|---|---|---|
| 1) $-i$; | 3) $-1+i$; | 5) $\sqrt{3} - i$ |
| 2) $1+i$; | 4) $-1-i$; | 6) $4-3i$ |

2 Вычислите:

1) $5\left(\cos 10^\circ + i\sin 10^\circ\right)\cdot 2\left(\cos 80^* + i\sin 80^\circ\right)$;

2) $3\left(\cos 50^\circ + i\sin 50^\circ\right)\cdot 4\left(\cos 70^\circ + i\sin 70^\circ\right)$;

3) $2\left(\cos\frac{\pi}{7} + i\sin\frac{\pi}{7}\right)\cdot 6\left(\cos\frac{6}{7}\pi + i\sin\frac{6}{7}\pi\right)$;

4) $\left(\cos\frac{3}{4}\pi + i\sin\frac{3}{4}\pi\right)\cdot 5\left(\cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi\right)\cdot 7\left(\cos\frac{7}{12}\pi + i\sin 12\pi\right)$;

5) $(1+i)^{25}$;

6) $\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-i}\right)^{20}$;

7) $\left(\sqrt{3}+i\right)^{n}$;

8) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)^{200}$;

9) $\frac{\cos 140^\circ + i\sin 140^\circ}{\cos 50^\circ + i\sin 50^\circ}$;

10) $\frac{\cos 130^\circ + i\sin 130^\circ}{\cos 40^\circ + i\sin 40^\circ}$;

11) $\frac{5\left(\cos 109^\circ + i\sin 109^\circ\right)}{3\left(\cos 49^\circ + i\sin 49^\circ\right)}$;

3 Найдите все значения корня

1) $\sqrt{1-i\sqrt{3}}$; 2) $\sqrt{2i}$; 3) $\sqrt{3-4i}$ 4) $\sqrt[3]{1}$;

5) $\sqrt[4]{-1}$; 6) $\sqrt[3]{1+i}$ ); 7) $\sqrt[3]{(1+i)^3}$ ; 8) $\sqrt[3]{i}$

***Контрольные вопросы:***

1) Какие числа называются комплексными мнимыми?
2) Что называется модулем комплексного числа?
3) Как выполняется сложение и вычитание комплексных чисел?
4) Как выполняется умножение комплексных чисел?
5) Как выполняется деление комплексных чисел?
6) Как выполняется возведение в степень мнимых и комплексных чисел?

**Тема 1.3 :** Ряды

Числовые ряды. Решение задач.

Числовым рядом называется сумма вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} U_n = U_1 + U_2 + U_3 + \ldots + U_n + \ldots,$$

где числа $U_1$, $U_2$, $U_3 \ldots U_n, \ldots$ ,называемые членами ряда, образуют бесконечную последовательность; член $U_n$ называется общим членом

Если существует конечный предел $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ последовательности частичных сумм ряда, то этот предел называют и говорят, что ряд сходится. Записывают:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

Если $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не существует или $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$, то ряд называют расходящимся.

**Необходимый и достаточный признак сходимости ряда.**

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} U_n$ может сходиться только при условии, что его общий член $U_n$ при неограниченном увеличении номера *n* стремится к нулю: $\lim\limits_{n=\infty} U_n = 0$

Если $\lim\limits_{n=\infty} U_n \neq 0$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} U_n$ расходится – это достаточный признак расходимости ряда

**Признак Даламбера.**

Если для ряда с положительными членами

$$\sum_{n=1}^{\infty} U_n = U_1 + U_2 + U_3 + \ldots + U_n + U_{n+1} + \ldots \quad (U_n > 0)$$

Выполняется условие $\lim\limits_{n=\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = l$, то ряд сходится при $l < 1$ и расходится при $l > 1$.

Признак Даламбера не дает ответа, если $l = 1$. В этом случае для исследования ряда применяются другие приемы.

***Пример 6***

Исследовать сходимость ряда, применяя необходимый признак сходимости и признак сравнения.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)\cdot 2^n} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{3\cdot 2^2} + \frac{1}{5\cdot 2^3} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)\cdot 2^n} + \ldots$$

***Решение***

Находим $\lim\limits_{n\to\infty} U_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{(2n-1)\cdot 2^n} = 0$

Необходимый признак сходимости ряда выполняется, но для решения вопроса о сходимости нужно применить один из достаточных признаков сходимости. Сравним данный ряд с геометрическим рядом

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots$$

который сходится, так как $q=\frac{1}{2}<1$

Сравнивая члены данного ряда, начиная со второго, с соответствующими членами геометрического ряда, получим неравенства

$$\frac{1}{3\cdot 2^2}<\frac{1}{2^2};\quad \frac{1}{5\cdot 2^3}<\frac{1}{2^3};\quad \ldots;\quad \frac{1}{(2n-1)\cdot 2^n}<\frac{1}{2^n};\ldots$$

т. е. члены данного ряда, начиная со второго, соответственно меньше членов геометрического ряда, откуда следует, что данный ряд сходится.

***Пример 7***

Исследовать сходимость ряда, используя признак Даламбера

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{5^n}=\frac{2}{5}+\frac{4}{25}+\frac{6}{125}+\ldots+\frac{2n}{5^n}+\ldots$$

***Решение***

Подставив в общий член ряда $\frac{2n}{5^n}$ вместо $n$ число $n+1$, получим $\frac{2(n+1)}{5^{n+1}}$. Найдем предел отношения $(n+1)$ – го члена к $n$ – му члену при $n\to\infty$

$$\frac{U_{n+1}}{U_n}\frac{2(n+1)}{5^{n+1}}\div\frac{2n}{5^n}=\frac{n+1}{5n}=\frac{1}{5}\left(1+\frac{1}{n}\right);$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{U_{n+1}}{U_n}=\frac{1}{5}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{5}<1$$

Следовательно, данный ряд сходится.

***Задания для самостоятельного решения:***

1 Исследуйте сходимость ряда, применяя необходимый признак и один из признаков сравнения:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)!}=\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4}+\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}+\ldots+\frac{1}{(n+2)!}+\ldots;$

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}=\frac{1}{\sqrt{1\cdot2}}+\frac{1}{\sqrt{2\cdot3}}+\frac{1}{\sqrt{3\cdot4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}+\ldots;$

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}=1+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt[3]{n}}+\ldots;$

4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}+\ldots+\frac{1}{n^n}+\ldots$

2 Исследуйте сходимость ряда, используя признак Даламбера:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3 \cdot 2^n} = \frac{1}{3 \cdot 2} + \frac{2}{3 \cdot 2^2} + \frac{3}{3 \cdot 2^3} + \ldots + \frac{n}{3 \cdot 2^n} + \ldots$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{3^n} = \frac{1 \cdot 2}{3} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3^2} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{3^3} + \ldots + \frac{(n+1)!}{3^n} + \ldots$

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \ldots + \frac{1}{n^4} + \ldots$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n(n+1)} = \frac{3}{1 \cdot 2} + \frac{3^2}{2 \cdot 3} + \frac{3^3}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{3^n}{n(n+1)} + \ldots$

***Контрольные вопросы:***

1) Дайте определение числового и гармонического рядов.
2) Приведите формулу общего вида ряда.
3) Перечислите признаки сходимости, расходимости рядов.

**Тема 1. 5: Обыкновенные дифференциальные уравнения**

Решение дифференциальных уравнений.

Всякое уравнение, которое содержит производные (или дифференциалы) неизвестных функций одной независимой переменной, называется *дифференциальным уравнением*.

Порядком данного дифференциального уравнения называется порядок наивысшей производной, входящей в это уравнение. Так, например, уравнение $x = \frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} - xy = 0$, есть дифференциальное уравнение второго порядка.

***Дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными.***

Дифференциальное уравнение первого порядка имеет вид

$$y' = f(x, y).$$

Для того, чтобы дифференциальное уравнение $y'' + y = 0$ имело решение, функция $f(x, y)$ должна удовлетворять некоторым условиям.

Если функция $f(x, y)$ такова, что ее можно представить в виде произведения двух функций $f(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$, из которой одна является функцией, зависящей из одной переменной, а вторая – от другой, то такое уравнение называется *дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными.*

***Пример 11***

Решите уравнение $\frac{dy}{dx} = \frac{1 + y^2}{(1 + x^2)xy}$

***Решение:***

В результате разделения переменных получаем

$$\frac{dx}{x\left(1+x^2\right)}-\frac{ydy}{1+y^2}=0$$

Находим общий интеграл

$$\int\frac{dx}{x\left(1+x^2\right)}-\int\frac{ydy}{1+y^2}=C$$

Откуда после интегрирования, получим

$$\ln x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)-\frac{1}{2}\ln(1+y^2)=C$$

Применяя свойства логарифмов, будем иметь

$$\ln(1+x^2)(1+y^2)=2\ln x-2C$$

Преобразовав произвольное постоянное, можно записать

$$\ln(1+x^2)(1+y^2)=\ln x^2+\ln C$$

или окончательно

$$\left(1+x^2\right)\left(1+y^2\right)=Cx^2$$

***Линейное дифференциальное уравнение первого порядка.***

Линейным дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнением вида

$$y'=P(x)y+Q(x)$$

где $P(x)$ и $Q(x)$–заданные непрерывные функции от переменной $x$.

Общее решение линейных дифференциальных уравнений первого порядка находится при помощи подстановки $y=uv$, где $u$ и $v$ – некоторые функции, которые нужно найти.

***Пример 12***

Решите уравнение $y'+\frac{1}{x}y=\frac{\sin x}{x}$

***Решение:***

Данное уравнение линейное: $P(x)=\frac{1}{x},\quad Q(x)=\frac{\sin x}{x}$

Применим подстановку $y=uv$, тогда $y'=u'v+uv'$. Имеем,

$$u'v+uv'+\frac{1}{x}uv=\frac{\sin x}{x}\quad\Leftrightarrow\quad u'v+u\left(v'+\frac{v}{x}\right)=\frac{\sin x}{x}.$$

Пусть $v'+\frac{v}{x}=0$. Отсюда $\frac{dv}{v}=-\frac{dx}{x}$. Интегрируя это равенство, получаем $v=\frac{1}{x}$. Следовательно , $u'\frac{1}{x}=\frac{\sin x}{x}$, откуда $u'=\sin x$, а потому $u=-\cos x+C$

Окончательно имеем $y = uv = \frac{1}{x}\left(-\cos x + C\right)$

***Линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами.***

Уравнения вида $y'' + py' + qy = 0$ называются линейными однородными дифференциальными уравнениями второго порядка с постоянными коэффициентами. Разберите по учебнику теорию решения дифференциальных уравнений.

***Пример13*** Решить уравнение $y'' + 7y' + 10y = 0.$

***Решение.*** Составим характеристическое уравнение и найдем его корни:

$k^2 - 7k + 10 = 0; \quad k_1 = 2, k_2 = 5.$

Найдем частные решения уравнения:

$y_1 = e^{2x}, \quad y_2 = e^{5x}.$

Составим общее решение уравнения:

$y = C_1y_1 + C_2y_2; \quad y = C_1e^{2x} + C_2e^{5x}.$

***Пример 14*** Решить уравнение $\frac{d^2y}{dx^2} - 10\frac{dy}{dx} + 25y = 0.$

***Решение.*** Составим характеристическое уравнение и найдем его корни:

$k^2 - 10k + 25 = 0; \quad k_1 = 5, k_2 = 5.$

Найдем два частных решения уравнения:

$y_1 = e^{5x}, \quad y_2 = xe^{5x}.$

Составим общее решение уравнения:

$y = C_1e^{5x} + C_2xe^{5x}.$

***Пример 15*** Решить уравнение $y'' - 6y' + 25y = 0.$

***Решение.*** Составим характеристическое уравнение и найдем его корни:

$k^2 - 6k + 25 = 0; \quad k_1 = 5 + 4i, k_2 = 3 - 4i.$

Корни – комплексные числа. Частные решения находим по формулам $y_1 = e^{ax}\cos bx$ и $y_2 = e^{ax}\sin bx$. В нашем случае $a = 3, b = 4.$ Общее решение имеет вид

$$y = C_1e^{3x}\cos 4x + C_2e^{3x}\sin 4x = e^{3x}\left(C_1\cos 4x + C_2\sin 4x\right).$$

Разберем решения дифференциальных уравнений вида

$\frac{d^2y}{dx^2} = f(x); \quad \frac{d^2y}{dx^2} = f\left(\frac{dy}{dx}\right).$

***Пример 16*** Решить уравнение $\frac{d^2y}{dx^2} = 4.$

***Решение.*** $f(x) = 4;\quad \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = 4 \Rightarrow d\left(\frac{dy}{dx}\right) = 4dx;$

$$\int d\left(\frac{dy}{dx}\right) = 4\int dx;\quad \frac{dy}{dx} = 4x + C_1$$

$$dy = (4x + C_1)dx;$$

$$\int dy = \int (4x + C_1)dx \Rightarrow y = 2x^2 + C_1x + C_2.$$

***Пример 17*** Решить уравнение $\frac{d^2y}{dx^2} = 5\frac{dy}{dx}.$

***Решение***. Положим $\frac{dy}{dx} = u$, тогда $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{du}{dx}.$

$$\frac{du}{dx} = 5u \Rightarrow \frac{du}{u} = 5dx;$$

$$\int \frac{du}{u} = 5\int dx \Rightarrow \ln u = 5x + C_1;\quad u = e^{5x+C_1};$$

$$\frac{dy}{dx} = e^{5x+C_1};\quad dy = e^{5x+C_1}dx;$$

откуда

$$\int dy = \int e^{5x+C_1}dx;\quad y = \frac{1}{5}e^{5x+C_1} + C_2.$$

***Задания для самостоятельного решения:***

1. Найти частное решение дифференциального уравнения $xdy = ydx$, если при $x = 2$ и $y = 6$.

2. Найти общее решение дифференциального уравнения $(x^2 - yx^2)dy + (y^2 + xy^2)dx = 0.$

3. Найти общее решение однородного дифференциального уравнения $(x + y)dx - xdy = 0.$

4. Найти частное решение линейного дифференциального уравнения $\cos xdy + y\sin xdx = dx$, если при $x = 0$ и $y = 1$.

5. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - 8y' + 16y = 0.$

6. Найти частное решение уравнения $y'' - y' - 2y = 0$, если при $y'' = 0,\ y = 9/5,\ y' = 0.$

7. Найти общее решение линейного дифференциального уравнения $\frac{dy}{dx} + \frac{2y}{x} = \frac{1}{x^2}$.

8. Найти общий интеграл однородного дифференциального уравнения $\frac{dy}{dx} = \frac{xy + y^2}{x^2}$.

9. Найти частное решение дифференциального уравнения $(x-1)dy = (y+1)dx$, если при $x = 2y = 3$.

10. Найти общее решение дифференциального уравнения $\left(1 + y^2\right)dx - \sqrt{x}dy = 0$.

11. Решить уравнение $\frac{d^2y}{dx^2} - 10\frac{dy}{dx} + 25y = 0$.

12. Найти общее решение однородного дифференциального уравнения $(x+y)dx + (y-x)dy = 0$.

13. Найти частное решение дифференциального уравнения $(1+y)dx - (1-x)dy = 0$, если при $x = -2$ и $y = 3$.

14. Найти общее решение дифференциального уравнения $x^2dy - (2xy + 3y)dx = 0$.

15. Решить уравнение $y'' - 6y' + 7y = 0$.

16. Найти общее решение линейного дифференциального уравнения $y' - y - 1 = 0$.

17. Найти частное решение однородного дифференциального уравнения $xy^2dy = \left(x^3 + y^3\right)dx$, если при $x = 1$ и $y = 3$.

18. Найти общее решение дифференциального уравнения $y^2dy + (x-2)dy = 0$.

19. Найти частное решение дифференциального уравнения $(x+1)ydx + (1-y)xdy = 0$, если при $x = 1$ и $y = 1$.

20. Найти общий интеграл уравнения $y' + y\,tg\,x = 0$.

21. Найти частное решение уравнения $y'' - 6y = 0$, если при $x = 0$, $y = 4$, $y' = 9$.

***Контрольные вопросы:***

1) Дайте определение дифференциального уравнения первого и второго порядков.
2) Приведите способы решения дифференциальных уравнений.

**Раздел 3 Численные методы**

**Тема:** Вычисление интегралов по формулам прямоугольников, трапеций и формуле Симпсона. Оценка погрешности.

*Вычисление объема тела вращения.*

1) Построить фигуру в декартовой системе координат.
2) Выбрать пределы интегрирования по оси OX в порядке возрастания.
3) Вычислить объем фигуры по формуле:

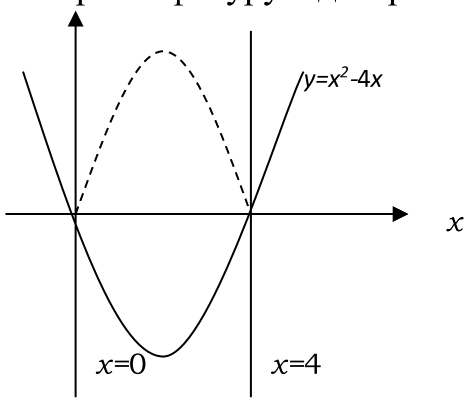
$$V = \pi \int_{x_1}^{x_2} y^2(x)dx .$$

***Пример 18***

Вычислить объем тела, полученного от вращения вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями: $y = x^2 - 4x, \; x = 0, \; x = 4$.

Решение:

построим фигуру в декартовой системе координат:




Вычислим объем получившегося тела вращения по формуле

$$V = \pi \int_{x_1}^{x_2} y^2(x)dx$$

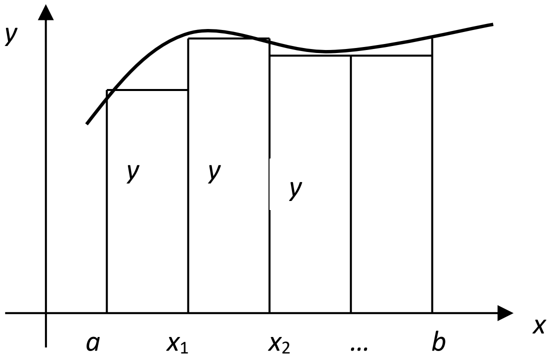
$$V = \pi \int_0^4 (x^2 - 4x)^2 dx = \pi \int_0^4 (x^4 - 8x^3 + 16x^2)dx = \pi\left(\frac{x^5}{5} - \frac{8x^4}{4} + \frac{16x^3}{3}\right)\Bigg|_0^4 = \pi\left[\left(\frac{4^5}{5} - \frac{8\cdot 4^4}{4} + \frac{16\cdot 4^3}{3}\right)\right| -$$

$$-\left(\frac{0^5}{5} - \frac{8\cdot 0^4}{4} + \frac{16\cdot 0^3}{3}\right)\Bigg|\Bigg] = \frac{512\pi}{15}$$

*Приближенное вычисление определенного интеграла.*

Иногда приходится вычислять интегралы, для которых подынтегральная функция задана не аналитически, а каким либо иным образом (табличным, графическим и т. д.). В этой связи разработаны приближенные методы вычисления определенных интегралов. Самые простые из них используют геометрический смысл интеграла – площадь криволинейной трапеции, которую можно подсчитать приближенно многими способами.

Например, таким: разобьем отрезок [a, b] на равные участки длины $h = \frac{b-a}{n}$ и, подсчитав значения $y_i(i = 0,\ 1,\ ...,\ n-1)$ в точках деления, заменим криволинейную трапецию ступенчатой фигурой, составленной из прямоугольников.




Тогда

$$\int_a^b y(x)dx \approx \frac{b-a}{n}(y_0 + y_1 + \ldots + y_{n-1}).$$

Эта приближенная формула носит название *формулы прямоугольников*.

Взяв вместо прямоугольников трапеции, мы практически при том же объеме вычислений получим более точный результат. Выполните соответствующий рисунок самостоятельно.

Тогда

$$\int_a^b y(x)dx \approx \frac{b-a}{n}(\frac{y_0}{2} + y_1 + \ldots + y_{n-1} + \frac{y_n}{2}).$$

Эта приближенная формула носит название *формулы трапеций*.

***Пример 19***

Вычислить приближенно интеграл $\int_0^{10}(3x^2 + 2x + 2)dx$ по формуле прямоугольников при $n$=10.

Решение:

$$\int_a^b y(x)dx = \int_0^{10}(3x^2 + 2x + 2)dx \approx \frac{10-0}{10}(y(0) + y(1) + y(2) + y(3) + y(4) + y(5) + y(6) + y(7) + y(8) + y(9)) =$$

$$= \frac{10}{10}((3\cdot 0^2 + 2\cdot 0 + 2) + (3\cdot 1^2 + 2\cdot 1 + 2) + (3\cdot 2^2 + 2\cdot 2 + 2) + (3\cdot 3^2 + 2\cdot 3 + 2) + (3\cdot 4^2 + 2\cdot 4 + 2) +$$

$$+ (3\cdot 5^2 + 2\cdot 5 + 2) + (3\cdot 6^2 + 2\cdot 6 + 2) + (3\cdot 7^2 + 2\cdot 7 + 2) + (3\cdot 8^2 + 2\cdot 8 + 2) + (3\cdot 9^2 + 2\cdot 9 + 2)) \approx$$

$$= 1(2 + 7 + 18 + 35 + 58 + 87 + 122 + 163 + 210 + 263) = 965$$

Из других приближенного интегрирования следует отметить *метод парабол*, который также называют *методом Симпсона*.

Его суть заключается в том, что отрезки прямых, ограничивающих элементарные трапеции сверху, заменяют дугами парабол, оси которых параллельны оси *Oy*.

В курсе математического анализа выводится формула

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{3n}(y_0 + y_n + 2(y_2 + y_4 + ... + y_{n-2}) + 4(y_1 + y_3 + ... + y_{n-1})),$$

где $n$ – четное число.

Применение этой формулы значительно повышает точность вычисления определенного интеграла.

***Пример 20***

Вычислить по формуле Симпсона интеграл $\int_1^4 x^2 dx$ .

***Решение:***

Разобьем отрезок интегрирования на 10 равных частей, тогда $(b-a)/3n=3/30=1/10=0,1$

Подставляя в подынтегральную функцию $y=x^2$ значения аргумента

$x_0=1$; $x_1= 1,3$; $x_2=1,6$, … , $x_{10}=4$,

найдем соответствующие значения ординат:

$y_0=1$; $y_1=1,69$; $y_2=2,56$; $y_3=3,61$; $y_4=4,84$;

$y_5=6,25$; $y_6=7,84$; $y_7=9,61$; $y_8=11,56$; $y_9=13,69$; $y_{10}=16$.

Применяя формулу

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{3n}(y_0 + y_n + 2(y_2 + y_4 + ... + y_{n-2}) + 4(y_1 + y_3 + ... + y_{n-1}))$$

получим

$\int_1^4 x^2 dx$ =0,1((1+16)+2(2,56+4,84+7,84+11,56)+

+4(1,69+3,61+6,25+9,61+13,69))=21

***Задания для самостоятельного решения:***

1 Вычислить приближенно интеграл $\int_0^8 (5x^2 - 2x + 1)dx$ по формуле Симпсона.

2 Вычислить приближенно интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ по формуле Симпсона.

3 Вычислить приближенно интеграл $\int_0^8 (-x^2 + 2x + 1)dx$ по формуле Симпсона.

***Контрольные вопросы:***

1. Дайте определение определенного интеграла. Запишите формулу Ньютона-Лейбница.
2. План вычисления площади плоской фигуры

3. Как вычисляется объем тела вращения?

4. Приведите примеры приближенных вычислений определенных интегралов.

**Раздел 4 : Теория вероятности и математическая статистика**

**Тема 4.1 Теория вероятностей**

**Тема:** Комбинаторика. Выборки элементов. Сумма и произведение событий. Вероятность появления хотя бы одного события Повторные независимые испытания Повторные независимые испытания.

На практике часто приходится выбирать из некоторого множества объектов подмножества элементов, обладающих теми или иными свойствами, располагать элементы одного или нескольких множеств в определённом порядке и т. д. Поскольку в таких задачах речь идёт о тех или иных комбинациях объектов, их называют «комбинаторные задачи».

*Комбинаторика* – это раздел математики, в котором рассматриваются задачи о тех или иных комбинациях объектов.

Рассмотрим два основных закона, с помощью которых решаются многие задачи комбинаторики – правила суммы и произведения.

**Правило суммы.**

Если имеется $n$ попарно непересекающихся множеств $A_1, A_2, ..., A_n$, содержащих $m_1, m_2, ..., m_n$ элементов соответственно, то число способов, которыми можно выбрать один элемент из всех этих множеств, равно

$$S = m_1 + m_2 + ... + m_n .$$

**Правило произведения.**

Если имеется $n$ попарно непересекающихся множеств $A_1, A_2, ..., A_n$, содержащих $m_1, m_2, ..., m_n$ элементов соответственно. Элемент $a_1 \in A_1$ можно выбрать $m_1$ способами, при любом выборе $a_1 \in A_1$ элемент $a_2 \in A_2$ можно выбрать $m_2$ способами и т.д., элемент $a_n \in A_n$ можно выбрать $m_n$ способами. Тогда $n$ элементов $(a_1, a_2, ..., a_n)$ можно выбрать $m_1 \cdot m_2 \cdot ... \cdot m_n$

$$P = m_1 \cdot m_2 \cdot ... \cdot m_n$$

В разных задачах в описываемых наборах объектов элементы могут повторяться, а могут и не повторяться. В зависимости от этого различают:

1) *комбинаторику без повторений*;
2) *комбинаторику с повторениями*.

И для первого, и для второго случая различают по три основных вида комбинаций объектов:

а) *размещения*;

б) *перестановки*;

в) *сочетания*.

Рассмотрим все шесть имеющихся случаев.

**Определение.** *Размещением без повторений* из $n$ элементов по $k$ элементам ( $k < n$ ) называется множество упорядоченных наборов, состоящих из $k$ элементов, взятых из $n$ элементов, причём в этих наборах элементы не повторяются. Число таких наборов определяется по формуле:

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)...(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)\ !}$$

***Пример 27***

В группе из 25 студентов надо выбрать старосту, профорга и культорга. Сколькими способами это можно сделать?

**Решение**

Так как из 25 человек выбираются трое человек с раз-личной специализацией (староста, профорг, культорг), то порядок людей в наборе важен, следовательно, имеем дело с числом размещений без повторений из 25 по 3, то есть

$$A_{25}^3 = 25 \cdot 24 \cdot 23 = \frac{25!}{22!} = 13800$$

Итак, троих активистов из 25 человек можно выбрать 13800 способами.

**Определение.** *Размещением с повторениями* из $n$ элементов по $k$ элементам называется множество упорядоченных наборов, состоящих из $k$ элементов, взятых из $n$ элементов, причём в этих наборах элементы могут повторяться. Число таких наборов определяется по формуле:

$$\overline{A}_n^k = n^k$$

***Пример 28***

Группа из 25 студентов сдаёт экзамен, по которому студенты могут получить оценки: 2, 3, 4, 5. Сколькими способами может быть заполнена экзаменационная ведомость?

***Решение***. Для каждого студента выбирается одна оценка из четырёх, всего выбор делается 25 раз. Возможны повторения, так как каждая оценка может быть выбрана любое количество раз. Порядок важен, так как он показывает, какому именно студенту достаётся выбранная оценка. Следовательно, число способов есть число размещений с повторениями из 4 по 25:

$$\overline{A}_4^{25} = 4^{25} = 1{,}126 \cdot 10^{15}$$

Итак, экзаменационная ведомость может быть заполнена $1{,}126 \cdot 10^{15}$ способами.

**Определение.** *Перестановкой без повторений* из $n$ элементов называется множество всевозможных перестановок данных $n$ элементов.

Перестановка без повторений – частный случай размещения без повторений при $k = n$ . Число таких наборов определяется по формуле:

$$P_n = n!$$

Иными словами, число способов упорядочить данное множество, состоящее из $n$ элементов, равно $P_n = n!$

***Пример 29*** Сколькими способами можно расставить в шеренгу студентов группы из 8 человек?

***Решение.*** Число способов есть число перестановок без повторений из 8 элементов, то есть

$$P_8 = 8! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 40320$$

Итак, расставить в шеренгу студентов группы из 8 человекможно 40320 способами.

**Определение** Перестановкой с повторениями набора элементов $n_1, n_2, .., n_k$

(где 1-й элемент повторяется $n_1$ раз, 2-й элемент повторяется $n_2$ раз и т.д., k –й элемент повторяется $n_k$ раз) называется множество выборок длины $n = n_1 + n_2 + ... + n_k$, в которых 1-й элемент повторяется $n_1$ раз, 2-й элемент повторяется $n_2$ раз и т.д., k –й элемент повторяется $n_k$ раз делается по формуле:

$$\overline{P_n} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot ... \cdot n_k!} = \frac{(n_1 + n_2 + ... + n_k)!}{n_1! \cdot n_2! \cdot ... \cdot n_k!}$$

**Пример 30** Сколько новых «слов» можно получить перестановкой букв слова МАТЕМАТИКА?

***Решение***. Так как мы переставляем буквы одного слова, то имеем перестановку. В данном слове буквы повторяются, а значит, перестановка будет с повторениями. В слове МАТЕМАТИКА всего 10 букв, из них: буква «М» присутствует 2 раза, буква «А» – 3 раза, буква «Т» – 2 раза, буквы «Е», «И», «К» по одному разу. Получаем

$$P_{10}(2,3,2,1,1,1) = \frac{10!}{2! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1!} = 151200$$

Итак, всего можно получить 151200 новых «слов».

**Определение.** *Сочетанием без повторений* из $n$ элементов по $k$ элементам ( $k < n$ ) называется множество неупорядоченных наборов, состоящих из $k$ элементов, взятых из $n$ элементов, причём в этих наборах элементы не повторяются. Число таких наборов определяется по формуле:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Имеют место следующие соотношения:

1) $C_n^k = C_n^{n-k}$;

2) $C_n^0 = C_n^n = 1$

***Пример 31*** Сколькими способами из группы в 25 человек можно выбрать баскетбольную команду из пяти человек?

***Решение***. Так как из 25 человек выбираются 5 человек и порядок, в котором выбираются члены команды, не важен, то число способов есть число сочетаний без повторений из 25 по 5, то есть

$$C_{25}^{5} = \frac{25!}{5!\cdot 20!} = 53130 .$$

Итак, из группы в 25 человек можно выбрать баскетбольную команду 53 130 способами.

**Определение.** *Сочетанием с повторениями* из $n$ элементов по $k$ элементам называется множество неупорядоченных наборов, состоящих из $k$ элементов, взятых из $n$ элементов, причём в этих наборах элементы могут повторяться. Число таких наборов определяется по формуле:

$$\overline{C}^{k} = C_{n+k-1}^{n-1} = C_{n+k-1}^{k}$$

***Пример 32*** В магазине имеется 15 сортов конфет. Некто покупает 10 конфет. Сколькими способами можно совершить покупку?

***Решение.*** Имеем 15 множеств (сортов) конфет, из которых производится выбор 10 конфет. Конфеты в наборе могут повторяться (возможно, что все 10 конфет будут одного сорта), порядок конфет в наборе не имеет значения. Получаем

$$\overline{C}_{15}^{10} = C_{15+10-1}^{10} = C_{24}^{10} = \frac{24!}{10!\cdot 14!} = 1961256 .$$

Итак, возможно 1961256 различных наборов конфет.

Очень часто бывает трудно определить, какая из шести комбинаций должна быть применена в каждом конкретном случае. Тогда можно воспользоваться следующей схемой:

1. Находим *основное множество*, из которого осуществляется выбор. Количество элементов этого множества есть $n$.

2. Если требуется:

– упорядочивать элементы *основного множества* местами, то имеем перестановку (при не повторении в полученном наборе элементов *основного множества* получаем перестановку без повторений, а при повторении – перестановку с повторениями;

– выбрать часть *основного множества*, то находим $k$ – число элементов *множества выбора*.

3. Важен ли порядок элементов *множества выбора*?

– Если порядок важен, то имеем размещения (при не повторении элементов *основного множества* во *множестве выбора* – без повторений, а при повторении – с повторениями.

– Если порядок не важен, то имеем сочетания (при не повторении элементов *основного множества* во *множестве выбора* – без повторений, а при повторении – с повторениями.

Заметим, что иногда необходимо применять описанные выше правила *суммы* и *произведения*.

***Пример 33*** В кружке художественного слова занимается 15 человек, в фортепианном кружке – 10, в вокальном – 12 и в фото- кружке – 20. Сколькими способами можно составить группу из 4 чтецов, 3 пианистов, 5 певцов и одного фотографа?

***Решение***

Разобьем задачу на подзадачи. Сначала найдем, сколькими способами можно выбрать чтецов.

1 Производим выбор из 15 человек, то есть $n = 15$.

2 Выбираем четырех человек, то есть $k = 4$

3 Порядок людей в группе не важен, а значит, мы имеем дело с сочетанием. Так как люди выбираются разные, то это будут сочетания без повторений – $C_{15}^{4}$ .

Проводя аналогичные рассуждения, выбираем:

Пианистов:3 из 10 – $C_{10}^{3}$ способами,

Певцов: 5 из 12 – $C_{12}^{5}$ ,

Фотографа 1 из 20 – $C_{20}^{1}$

Поскольку выбор производится по все четырем позициям, а не по одной, применяем правило произведения. Итак, группу можно составить

$N = C_{15}^{4} \cdot C_{10}^{3} \cdot C_{12}^{5} \cdot C_{20}^{1} = 2{,}595 \cdot 10^{9}$ способами.

***Задания для самостоятельного решения:***

1 Сколькими способами можно выбрать один цветок из корзины, в которой имеется 10 тюльпанов, 8 роз и 5 гладиолусов?

2Из 6 первокурсников, 5 второкурсников и 7 третьекурсников надо выбрать 3 студентов на конференцию. Сколькими способами можно это сделать, если выбранные студенты должны быть с разных курсов?

3 Из 8 мальчиков и 10 девочек класса для участия в эстафетенадо составить 3 команды, каждая из которых состоит из мальчика и девочки. Сколькими способами это можно сделать?

4 Сколько различных «слов» из трёх букв можно составить из букв слова ЗАЧЁТ?

5 Сколькими способами можно выбрать 3 различных пирожка из 8 видов, имеющихся в буфете?

6 Сколько различных пятибуквенных «слов» можно составить из букв слова ВОЛГА. Сколько среди них таких, которые начинаются буквой В и заканчиваются буквой А?

7 Студенты 1 курса изучают 12 дисциплин. Сколькими способами можно составить расписание на среду, если в этот день должно быть 5 различных предметов?

8 Сколькими способами можно расставить 6 различных книгна полке,

чтобы определённые 3 книги стояли рядом?

9 Сколькими способами 3 награды могут быть распределенымежду 7 участниками олимпиады?

10 В корзине лежит 8 морковок, 6 картошек, 5 огурцов. Сколькими способами можно выбрать 4 овоща из корзины? Сколькими способами можно выбрать 1 морковку и 2 картошки?

11 Сколько различных трёхзначных чисел (цифры не повторяются) можно составить из цифр числа 4689?

12 Из цифр 1, 5, 7, 8 составлены различные трёхзначные числа. Сколько из них чётных?

13 Сколько перестановок можно составить из букв слова ОСИНА, в которых буква И стоит на третьем месте?

14 У одного студента имеется 5 различных карандашей, а у другого – 8. Сколькими способами они могут осуществить обмен: карандаш на карандаш? два карандаша на два карандаша?

15 В урне имеется 10 белых и 7 чёрных шаров. Сколькими способами можно выбрать 4 шара, чтобы среди них был 1 белый и3 чёрных шара?

16 Из группы, состоящей из 7 юношей и 5 девушек, надо выбрать 4 человек так, чтобы среди них было не менее двух юношей. Сколькими способами это можно сделать?

***Контрольные вопросы:***

1. Что является предметом комбинаторики?
2. Сформулируйте правила суммы и произведения.
3. Дайте определение размещений без повторений (с повторениями).
4. Дайте определение сочетаний без повторений (с повторениями).
5. Дайте определение перестановок без повторений (с повторениями).
6. Сформулируете схему решения задач комбинаторики.

## Тема 4.2 Математическая статистика

**Тема:** Числовые характеристики дискретной случайной величины

### 1 Понятие случайной величины.

Определение. *Случайной величиной* называют переменную величину, которая в зависимости от исхода испытания случайно принимает одно значение из множества возможных значений.

Обозначение случайных величин: $X$, $Y$, $Z$, ... ; возможных значений соответствующих случайных величин: $x$, $y$, $z$, …

Например:

1) При однократном бросании игральной кости число выпавших очков – это случайная величина, она может принять одно из значений: 1, 2, 3, 4, 5, 6.

2) Число родившихся мальчиков среди 3 новорождённых – это случайная величина, которая может принять одно из значений: 0, 1,2, 3

**Определение.** *Дискретной случайной величиной* называют случайную величину, принимающую различные отдельные изолированные друг от друга значения с определёнными вероятностями.

Число возможных значений дискретной случайной величины может быть конечным и бесконечным.

*Непрерывной случайной величиной* называют случайную величину, которая может принимать любые значения из некоторого числового промежутка.

Число возможных значений непрерывной случайной величины бесконечно.

Примером непрерывной случайной величины является прирост веса домашнего животного за месяц, рост человека, температура воздуха.

**Определение.** *Законом распределения случайной величины* называют любое правило (таблица, функция, график), указывающее вероятности отдельных значений случайной величины или множества этих значений.

**2 Закон распределения дискретной случайной величины.**

Будем рассматривать дискретные случайные величины, множество допустимых значений которых конечно.

Закон распределения дискретной случайной величины удобнозадавать в виде таблицы, в которой первая строка содержит возможные значения $x_1, x_2, ...x_n$ величины *X* (обычно в порядке возрастания), а вторая строка – их вероятности $P_1, P_2, ...P_n$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $X$ | $x_1$ | $x_2$ | ... | $x_n$ |
| $P$ | $P_1$ | $P_2$ | ... | $P_n$ |

Так как в результате испытания величина *X* всегда примет одно значение из множества возможных значений $x_1, x_2, ...x_n$ то сумма всех вероятностей равна единице:

$$P_1 + P_2 + ... + P_n = 1$$

Закон распределения дискретной случайной величины можнозадавать графически. Для этого на оси О*x* откладывают возможные значения $x_i$ случайной величины *X*, а на оси *Oy* – их вероятности $p_i$ .

*Многоугольником* (*полигоном*) *распределения* дискретной случайной величины *X* называют ломаную, соединяющую последовательно точки $(x_1, p_1), (x_2, p_2), ..., (x_n, p_n)$.

***Пример 34***

В денежной лотерее выпущено 100 билетов. Разыгрывается 2 выигрыша по 50 рублей и 30 выигрышей – по 1 рублю. Найти закон распределения случайной величины $X$ – стоимости выигрыша для владельца одного лотерейного билета. Построить многоугольник распределения.

***Решение.***

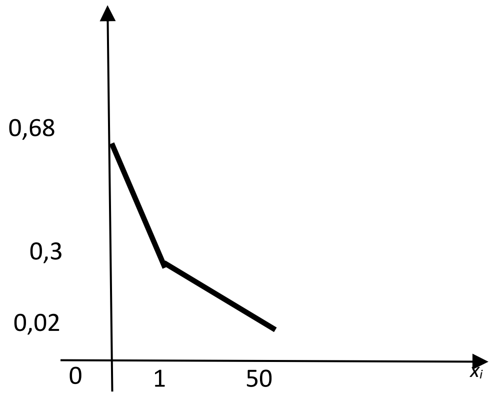
Случайная величина $X$ может принять следующие значения (выигрыш в рублях): $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 50$, причём $p_2 = \frac{30}{100} = 0,3$ $p_3 = \frac{2}{100} = 0,02$. Из равенства $p_1 + p_2 + p_3 = 1$ можно найти $p_1$: $p_1 = 1 - p_2 - p_3 = 0,68$

Запишем закон распределения:

| $X$ | 0 | 1 | 50 |
|---|---|---|---|
| $p$ | 0,68 | 0,3 | 0,02 |

Проверка $0,02 + 0,3 + 0,68 = 1$

Построим многоугольник распределения:




**3 Функция распределения случайной величины.**

Для непрерывной случайной величины в отличие от дискретной случайной величины нельзя построить таблицу распределения вероятностей.

Универсальным способом задания закона распределения вероятностей и непрерывной случайной величины, и дискретной случайной величины является функция распределения случайной величины.

**Определение.** *Функцией распределения* случайной величины $X$, или *интегральной функцией распределения*, называется функция $F(x)$, равная вероятности того, что величина $X$ приняла значение, меньшее $x$:

$$F(x) = P(X < x).$$

Свойства функции распределения.

1. $0 \le F(x) \le 1$ (так как $F(x)$ – это вероятность).

2. $F(x)$ – неубывающая функция:

$$x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad F(x_1) \le F(x_2)$$

3. Вероятность попадания случайной величины $X$ в полуинтервал $[a;b)$ равна разности между значениями функции распределения в правом и левом концах указанного полуинтервала:

$$P(a \le X \le b) = F(b) - F(a)$$

4. Вероятность попадания непрерывной случайной величины $X$ примет какое-либо заранее заданное значение, равно 0:

$$P(X = x_1) = 0$$

5. Вероятности попадания непрерывной случайной величины $X$ в интервал, отрезок или полуинтервал с одними и теми же концами одинаковы:

$$P(a < X < b) = P(a \le X \le b) = P(a \le X < b) = P(a < X \le b)$$

6. Если возможные значения случайной величины $X$ принадлежат интервалу $(a;\, b)$, то при $x \le a$ $F(x) = 0$, при $x \ge b$ $F(x) = 1$.

7. Для непрерывной случайной величины с возможными значениями на всей числовой оси справедливы равенства $F(-\infty) = 0,\ \ F(+\infty) = 1$

**Определение.** Случайная величина называется *непрерывной,* если её функция распределения непрерывна в любой точке и дифференцируема всюду, кроме, может быть, отдельных точек.

Функция распределения дискретной случайной величины имеет вид $F(x) = \sum\limits_{x_i < x} p_i$. Здесь суммирование ведётся по всем $i$, для которых $x_i < x$.

Функция распределения дискретной случайной величины является функцией с разрывами. Её график имеет ступенчатый вид.

***Пример 35***

По условию примера 34 найти функцию распределения $F(x)$ и построить ее график.

***Решение***

$X$ – стоимость выигрыша для владельца одного лотерейного билета – дискретная случайная величина.

Закон распределения известен:

| $X$ | 0 | 1 | 50 |
|---|---|---|---|
| $p$ | 0,68 | 0,3 | 0,02 |

Будем задавать различные значения $x$ и находить для них $F(x) = P(X < x)$.

Если $x \le 0$, то $F(x) = 0$ (по свойству 6).

Если $0 < x \le 1$, то $F(x) = P(X < 1) = P(X = 0) = 0{,}68$.

Если $1 < x \le 50$, то $F(x) = P(X < 50)$. Здесь событие $X < 50$ состоит в том, что произойдет либо событие $X = 1$, либо событие X = 0, которые несовместны.

Следовательно, по теореме сложения вероятностей несовместных событий имеем

$$F(x) = P(X < 50) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0{,}68 + 0{,}3 = 0{,}98$$

Если $x > 50$, то $F(x) = 1$ (по свойству 6).

Итак, запишем функцию распределения $F(x)$ аналитически:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & при \quad x \le 0, \\ 0{,}68 & при \quad 0 < x \le 1, \\ 0{,}98 & при \quad 1 < x \le 50, \\ 1 & при \quad x > 50 \end{cases}$$

График функции распределения $F(x)$:

Закон распределения полностью характеризует случайную величину. Однако при решении многих задач достаточно знать лишь некоторые числовые характеристики случайной величины, которые описывают отдельные существенные свойства закона распределения случайной величины.

Пусть дискретная случайная величина задана законом распределения:

| $X$ | $x_1$ | $x_2$ | ... | $x_n$ |
|---|---|---|---|---|
| $P$ | $p_1$ | $p_2$ | ... | $p_n$ |

**4 Математическое ожидание дискретной случайной величины.**

Математическим ожиданием $M(X)$ дискретной случайной величины $X$ называют сумму произведений всех ее возможных значений на их вероятности:

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n$$

Замечания:

1) Математическое ожидание дискретной случайной величины является неслучайной (постоянной) величиной.

2) Математическое ожидание $M(X)$ является средним значением дискретной случайной величины $X$ (центром распределения).

3) Математическое ожидание числа появлений события в одном испытании равно вероятности этого события.

***Пример 36***

Найти математическое ожидание дискретной случайной величины $X$, заданной законом распределения:

| $X$ | -1 | 5 |
|---|---|---|

| | | |
|---|---|---|
| $P$ | 0,4 | 0,6 |

***Решение***

$$M(X)=\sum_{i=1}^{n}x_i p_i = x_1 p_1 + x_2 p_2 = -1\cdot 0{,}4+5\cdot 0{,}6=-0{,}4+3=2{,}6$$

Свойства математического ожидания дискретной случайной величины.

1. Математическое ожидание постоянной величины равно самой постоянной: $M(C)=C, \quad C=const$ .

2. Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания: $M(CX)=C\cdot M(X), \quad C=const$ .

3. Если $X, Y$ независимые случайные величины, то

$M(X+Y)=M(X)+M(Y)$;

$M(X\cdot Y)=M(X)\cdot M(Y)$

**5 Дисперсия дискретной случайной величины**

Пусть *X* – случайная величина, $M(X)$ – ее математическое ожидание.

Разность $X-M(X)$ называют *отклонением* случайной величины *X* от ее математического ожидания $M(X)$.

Дисперсией (расстоянием) $D(X)$ дискретной случайной величины *X* называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания:

$$D(X)=M\left[(X-M(x))^2\right]=\sum_{i=1}^{n}(x_i-M(X))^2 p_i=(x_i-M(X))^2 p_2+\ldots+(x_n-M(X))^2 p_n$$

Дисперсия характеризует разброс (рассеивание) значений случайной величины относительно ее математического ожидания.

Свойства дисперсии дискретной случайной величины.

1. $D(X)=M\left(X^2\right)-(M(X))^2$.

2. Дисперсия постоянной величины равна нулю: $D(C)=0 \quad C=const$

3. Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возводя его в квадрат: $D(CX)=C^2\cdot D(X), \quad C=const$

4. Если X, Y независимые случайные величины, то

$D(X+Y)=D(X)+D(Y)$;

$D(XY)=M\left(X^2\right)\cdot M\left(Y^2\right)-(M(X))^2\cdot(M(Y))^2$.

***Пример 37***

Найти дисперсию дискретной случайной величины X, заданной законом распределения

| | | | |
|---|---|---|---|
| $X$ | 1 | 2 | 3 |
| $P$ | 0,2 | 0,3 | 0,5 |

***Решение***

Вычислим дисперсию по свойству 1

$$D(X) = M\left(X^2\right) - \left(M(X)\right)^2$$

Найдем математическое ожидание величины *X*:

$$M(X) = \sum_{i=1}^{3} x_i p_i = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 = 1 \cdot 0,2 + 2 \cdot 0,3 + 3 \cdot 0,5 = 0,2 + 0,6 + 1,5 = 2,3$$

Запишем закон распределения квадрата случайной величины *X*:

| $X^2$ | 1 | 4 | 9 |
|---|---|---|---|
| $P$ | 0,2 | 0,3 | 0,5 |

Математическое ожидание квадрата случайной величины *X* равно:

$$M\left(X^2\right) = 1 \cdot 0,2 + 4 \cdot 0,3 + 9 \cdot 0,5 = 0,2 + 1,2 + 4,5 = 5,9$$

Тогда получим

$$D(X) = M\left(X^2\right) - \left(M(X)\right)^2 = 5,9 - 2,3^2 = 5,9 - 5,29 = 0,61$$

## 6. Среднее квадратическое отклонение дискретной случайной величины

Дисперсия имеет размерность квадрата случайной величины *X*, что в сравнительных целях неудобно. Когда желательно, чтобы оценка разброса имела размерность случайной величины X, используют другую числовую характеристику – среднее квадратическое отклонение.

*Средним квадратическим отклонением* дискретной случайной величины X называют квадратный корень из ее дисперсии:

$$\delta(X) = \sqrt{D(X)}$$

***Пример 38***

Найти среднее квадратическое отклонение случайной величины X, заданной законом распределения (см пример 37)

| $X$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $P$ | 0,2 | 0,3 | 0,5 |

***Решение***

Так как $D(X) = 0,61$ , то

$$\delta(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{0,61} \approx 0,78$$

***Задания для самостоятельного решения:***

1. Определить, закон распределения какой из дискретных случайных величин *X* или *Y* верен.

| $X$ | –1 | 0 | 1 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $p$ | 0, | 0, | 0, | 0, |

| $Y$ | –2 | 1 | 3 |
|---|---|---|---|
| $p$ | 0, | 0, | 0, |

2. Найти *k*, при котором закон распределения дискретной случайной величины *X* задаётся таблицей:

| $X$ | 1 | 4 | 5 | 7 |
|---|---|---|---|---|
| $p$ | 0,2 | 0,1 | $k$ | 0,4 |

3. В партии имеется 15 рубашек, из них 5 имеют скрытый дефект. Покупают 3 рубашки. Найти закон распределения случайной величины $X$ – числа дефектных рубашек среди купленных.

4. В урне имеется 7 белых и 3 чёрных шара. Из урны извлекают шар 2 раза подряд, причём каждый раз вынутый шар возвращается в урну и шары перемешиваются. Найти закон распределения случайной величины $X$ – числа извлечённых белых шаров.

5. Найти числовые характеристики (математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение) дискретной случайной величины $X$, заданной законом распределения:

| $X$ | -1 | 4 |
|---|---|---|
| $p$ | 0,2 | 0,8 |

6. Для дискретной случайной величины $X$ известно $M(X)=4,\quad M\left(X^2\right)=25$. Найти ее среднее квадратическое отклонение $\delta\left(X\right)$

7. В урне имеется 5 шаров с номерами от 1 до 5. Вынули 2 шара. Случайная величина $X$ – сумма номеров шаров. Найти закон распределения и числовые характеристики величины $X$.

8. Независимые дискретные случайные величины X и Y заданы следующими законами распределения:

| $X$ | -2 | -1 | 1 |
|---|---|---|---|
| $p$ | 0,1 | 0,8 | 0,1 |

| $Y$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $p$ | 0,5 | 0,4 | 0,1 |

9. Стрелок делает по мишени три выстрела. Вероятность попадания в мишень при каждом выстреле равно 0,8. Пусть случайная величина $X$ – число попаданий в мишень. Найти закон распределения величины $X$.

**Контрольные вопросы:**

1. Что называется случайной величиной?
2. Какая случайная величина называется дискретной (непрерывной)?
3. Дайте определение закона распределения случайной величины.
4. Что называется, многоугольником распределения дискретной случайной величины?
5. Дайте определение функции распределения случайной величины.
6. Сформулируйте свойства функции распределения.
7. Дайте определение непрерывной случайной величины.
8. Что называется математическим ожиданием дискретнойслучайной величины?
9. Дайте определение дисперсии дискретной случайной величины.

10. Что называется, средним квадратическим отклонением дискретной случайной величины?

**Перечень учебных изданий, Интернет-ресурсов, дополнительной литературы**

Основные источники:

1. Богомолов Н.В. Практические занятия по математике: Учебное пособие для средних специальных учебных заведений. – М.: Юрайт, 2020
2. Богомолов Н.В., Самойленко П.Ю. Сборник дидактических заданий по математике: Учеб. пособие для сред. спец. учеб. заведений. – М.: Юрайт, 2022.
3. Дорофеева А.В., Математика: учеб.пос. – М.: Юрайт, 2021.
4. Дадаян А.А., Сборник задач по математике: учеб.пос. – М.: Форум, 2022.
5. Лисичкин В.Т., Соловейчик И.Л. Математика: Учеб. Пособие для техникумов. – М.: Высш. шк., 2020.

Дополнительные источники:

1. Башмаков М.И. Математика: Учебное пособие для СПО. – М.: КноРус, 2020.
2. Виктор Шипачев; под ред. А.Н. Тихонова Математика: учебник и практикум для СПО 8-е изд., перераб. и доп. - М.: Издательство Юрайт, 2020. - 447 с. - (Серия: Профессиональное образование)

Математика: учебник для СПО/ О.В. Татарников [и др.]; под общ. ред. О. В. Татарникова. - М.: Издательство Юрайт, 2016. - 450 с. - (Серия: Профессиональное образование)